2018 年高中数学联赛几何题的解法研究及推广

金磊

(西安交通大学附属中学，710043)

本文研究了 2018 年高中数学联赛加试第二题，准备系统总结本人接触到及想到的所有思路和解法，对各种解法对比总结，并对此题进行推广.

题目 如图 1, $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $AB < AC$, M 为边 BC 的中点, D、E 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆上弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 和弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点, F 为 $\triangle ABC$ 内切圆在 AB 边上的切点, G 为 AE 与 BC 的交点, N 在线段 EF 上, 满足 $NB \perp AB$. 证明: 若 $BN = EM$, 则 $DF \perp FG$.

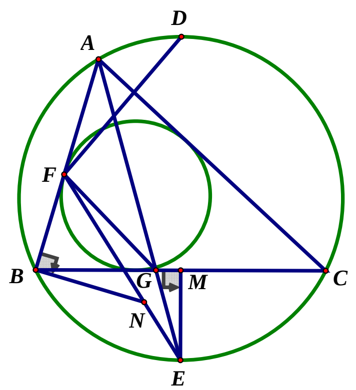

图 1

首先看本题的八种证法:

设 $\triangle ABC$ 外心为 O, 其内心为 I, 显然 $EMOD$ 共线且 $DAGM$ 共圆, 因此欲证 $DF \perp FG$, 即证 F 在此圆上, 只需证明 F 与四点中某三点共圆即可.

思路 1: 倒比例.

证法 1 如图 2, 作 $ET \perp AB$ 于 T, 则 $\triangle ATE \sim \triangle CME, IF /\!/ ET, EI = EC$, $\triangle ABG \sim \triangle AEC$, 故

$$BF = BN\frac{FT}{ET} = EM\frac{AT}{ET}\frac{IE}{AE} = EM\frac{CM}{EM}\frac{CE}{AE} = BM\frac{BG}{AB},$$

修订日期: **2019-01-18.**

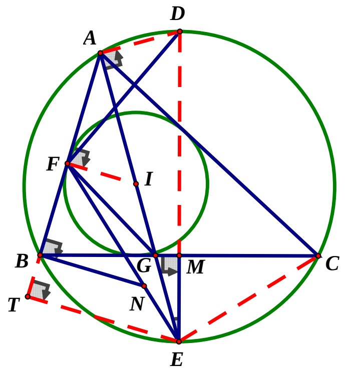

图 2

即

$$BA \times BF = BM \times BG.$$

则 $AFGM$ 共圆. 则 $DF \perp FG$. $\square$

思路 2: 得到 $\triangle EBN \cong \triangle IEM$, 再得 $IFEM$ 共圆.

证法 2 由内心性质 (鸡爪定理) 知: $EB = EI$, $\angle ABE = \angle AGC$. 则

$$\angle EBN = \angle MEI.$$

由 $BN = EM$ 及 $EB = EI$, 得

$$\triangle EBN \cong \triangle IEM\ (SAS).$$

又 $IF \parallel BN$, 则

$$\angle IMD = \angle BNF = \angle IFE,$$

从而 $IFEM$ 共圆. 则

$$\angle AFM = 90^\circ + \angle IFM = 90^\circ + \angle IEM = \angle AGM,$$

故 $AFGM$ 共圆, 则 $DF \perp FG$. 证毕. $\square$

若设 $\triangle ABC$ 边角为 a, b, c, A, B, C. 容易算出:

$$BF = \frac{a+c-b}{2},\ \ BM = \frac{a}{2},\ \ BG = \frac{ac}{b+c}.$$

欲证 $AFGM$ 共圆, 需证 $BF \times BA = BG \times BM$, 即证

$$\frac{a+c-b}{2}c = \frac{a}{2}\frac{ac}{b+c},$$

即证

$$ab + ac = a^2 + b^2 - c^2. \tag{$*$}$$

下述几种证法都是得到 $(*)$ 式.

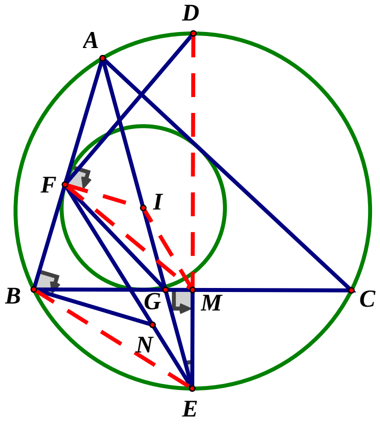

图 3

思路 3: 得到 $\triangle FBE \sim \triangle MGI$, 然后计算.

证明 3 如图 3, 由证法 2 得 $\triangle EBN \cong \triangle IEM$, 则 $\triangle EBF \sim \triangle IGM$, 从而

$$\frac{GM}{FB}=\frac{IG}{EB}=1-\frac{GE}{EB}=1-\frac{GC}{AC}=1-\frac{a}{b+c},$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}-\frac{ac}{b+c}}{\frac{a+c-b}{2}}=1-\frac{a}{b+c}.$$

化简即得 $(*)$ 式. $\square$

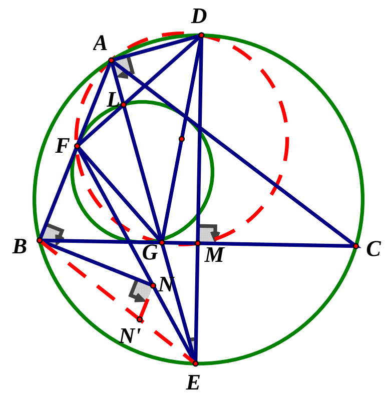

图 4

思路 4: 作出 $\triangle N'BN \cong \triangle GEM$.

证法 4 如图 4, 作 $N'N \perp BN$, N'在 BE 上, 同上有

$$\angle NBN' = \angle MEG,$$

则

$$\triangle NBN' \cong \triangle MEG \,(ASA),$$

故 $NN' = MG$, $NN' \,/\!/\, AB$, 则

$$\frac{MG}{BF}=\frac{NN'}{BF}=\frac{EN'}{BE}=\frac{EB-EG}{BE},$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}-\frac{ac}{b+c}}{\frac{a+c-b}{2}}=1-\frac{a}{b+c}.$$

化简即得 $(*)$ 式. $\square$

注 不难发现证法 3,4 异曲同工, 得到的比例式相同.

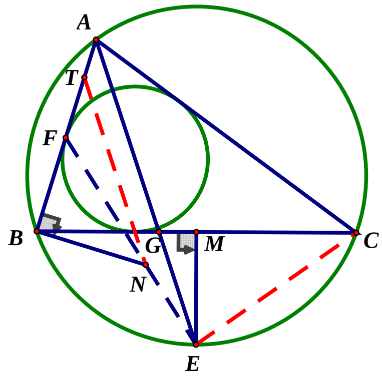

图 5

思路 5: 作出 $\triangle TBN \cong \triangle CME$.

证法 5 如图 5, 作 $NT \parallel AE$, 且 T 在 AB 上, 则显然

$$\angle BTN=\angle BAE=\angle BCE,$$

又 $BN=EM$, 则 $NT=EC$ 且 $BT=BM$, 从而得到

$$TF=BT-BF=\frac{a}{2}-\frac{a+c-b}{2}=\frac{b-c}{2},$$
$$FA=\frac{b+c-a}{2},$$

又

$$\frac{FT}{FA}=\frac{NT}{EA}=\frac{CE}{EA}=\frac{BG}{BA},$$

即

$$\frac{b-c}{b+c-a}=\frac{a}{b+c},$$

化简即得 $(*)$ 式. $\square$

思路 6: 作 $\triangle BNF \cong \triangle MEX$, 得到 $\triangle FAE \sim \triangle XCE$.

证法 6 如图 6, 在线段 MC 上作 $MX=BF$, 则

$$\triangle BNF \cong \triangle MEX\ (SAS).$$

故 $\angle BFN=\angle MXE$, 又 $\angle FAE=\angle XCE$, 故

$$\triangle FAE \sim \triangle XCE,$$

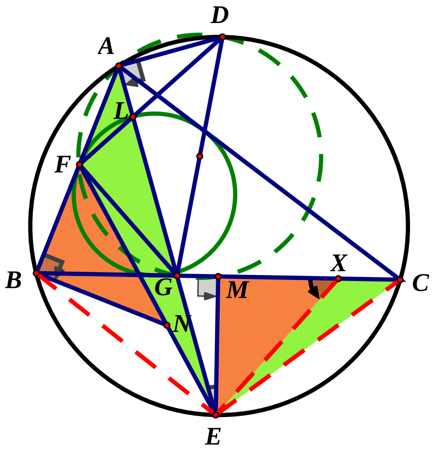

图 6

则

$$\frac{XC}{AF}=\frac{EC}{EA}=\frac{BG}{BA}=\frac{a}{b+c},$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{a}{2}-\frac{a+c-b}{2}}{\frac{b+c-a}{2}}=\frac{a}{b+c}.$$

化简即得 $(*)$ 式. □

注 证法 5 与 6 殊途同归, 得到的比例式完全相同,所以其本质一样.

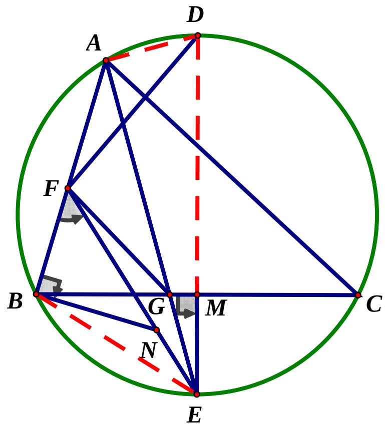

图 7

思路 7: 直接三角计算.

证法 7 设 $\angle BFN=\theta$, 则 $\cot\theta=\frac{BF}{BN}=\frac{BF}{EM}=\frac{BF}{BE\sin\frac{A}{2}}$. 由正弦定理得

$$\frac{AF}{AE}=\frac{\sin(\theta-\frac{A}{2})}{\sin\theta}=\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cot\theta=\cos\frac{A}{2}-\frac{BF}{BE},\qquad(\star)$$

且

$$AE=2R\sin(B+\frac{A}{2}),BE=2R\sin\frac{A}{2},$$

$$AF=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},BF=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

将结果代入 $(\star)$ 式得到

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin(B+\frac{A}{2})}+2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2},$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{B-A}{2}+\sin\frac{A+3B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)=\sin(A+B)+\sin B,$$

$$\Rightarrow 2\sin C+4\sin\frac{C}{2}\sin B\cos\frac{A+B}{2}=\sin C+\sin B,$$

$$\Rightarrow 2\sin B\cos C=\sin C+\sin B.$$

由正弦及余弦定理, 上式化简即得 $(*)$ 式. □

思路 8: 证明 $\triangle FBD\sim\triangle GED$.

证法 8 欲证 $\triangle FBD\sim\triangle GED$, 需证

$$\frac{BF}{EG}=\frac{BD}{ED}=\cos\frac{A}{2}.$$

因为

$$BF=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad EG=\frac{EM}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2R\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

从而需证

$$\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2R\sin^2\frac{A}{2}}=\cos\frac{A}{2},$$

即

$$4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin A,$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{C+B}{2}+\sin\frac{C-B}{2}\right)=\sin(B+C),$$

$$\Rightarrow \sin B+\sin C=\sin(B+C)+\sin(B-C),$$

$$\Rightarrow \sin B+\sin C=2\sin B\cos C.$$

由正弦及余弦定理, $(*)$ 式化简即得上式. □

注 证法 8 与证法 7 类似, 都是三角计算为主, 不过证法 8 稍微绕了点弯路.

其次对上述解法作一总结及简评

此题从结果入手比较容易, 显然 $DAGM$ 共圆, 因此欲证 $DF\perp FG$, 只需证明 F 与四点中某三点共圆即可. 但是考虑到图形特征, 基本上证明 $AFGM$ 共圆比较靠谱, 其他的证明要么过于复杂无法完成, 要么会绕弯路, 最终还会回到 $AFGM$ 共圆或上述恒等式上来.

欲证 $AFGM$ 共圆, 要么直接导出此四边形的边角关系, 如证法 1、2, 简洁明了; 要么得到 $\triangle ABC$ 边角关系 $(*)$ 式, 如后面的六种证法.

其实还可以分析证明 $\triangle FAD \sim \triangle FIG$, 只是过程稍微复杂一点. 这样上述后 6 种证法都可与上面两种解法组合成"新"的证明, 因此从上述解法中可以得到几十种证明. 如果再适当绕点弯路, 就能得到更多的解法了, 囿于篇幅, 不再赘述.

本题入手的关键是如何利用条件 $BN = EM$, 要么作出垂直如证法 1, 要么得到全等三角形如法 2、3, 要么作出全等三角形如法 4、5、6, 要么直接三角计算如法 7、8. 如果要用纯几何方法, 不使用计算, 则必须作出内心, 如法 1、2; 如果不作出内心, 一般需要得到 $\triangle ABC$ 的边角恒等式上述 $(*)$ 式. 如后面的六种证法.

整体而言, 上述证法中, 1 应该是最简洁的, 而 7 应该是最不需要动脑筋的, 因为 7 没有添加辅助线, 只是三角计算. 当然本题应该还有其他的解法.

再次看本题的图形应该满足的条件及如何用尺规作出来?

显然 $\triangle ABC$ 应该满足一个条件, 由上述 $(*)$ 式可以得到

$$c = b(2\cos C - 1),$$

而 $c \geq b\sin C$, 故

$$2\cos C - \sin C \geq 1,$$

从而得到

$$C \leq \arctan\frac{3}{4}.$$

下面给出 C 和 b 即可得到 c, 从而作出准确图形.

最后, 将此题推广:

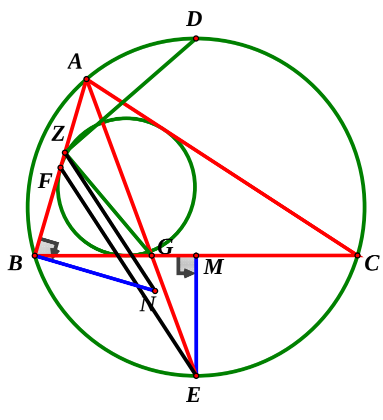

图 8

推广 如图 8, $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 边的中点, 点 D 和 E 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆上弧 $\widehat{BAC}$ 和弧 $\widehat{BC}$ 的中点, F 为内切圆在 AB 边上的切点, G 为 AE 与 BC 的交点, Z 在线段 AB 上, $NZ \parallel EF$, $NB \perp AB$, 求证: 若 $BN = EM$, 则 $DZ \perp ZG$.

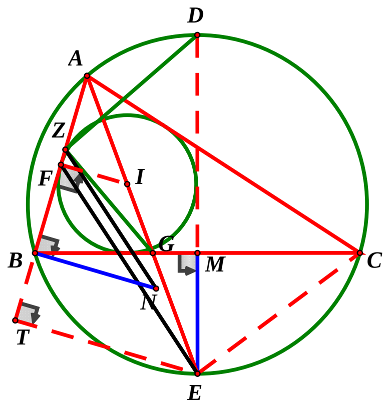

图 9

证明 如图 9, 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 作 $ET \perp AB$ 于 T, 则

$$\triangle ZBN \sim \triangle FTE,\ \triangle ATE \sim \triangle CME,$$

且

$$IF \parallel ET,\ EI = EC,\ \triangle ABG \sim \triangle AEC,$$

因此

$$BZ = BN\frac{FT}{ET} = EM\frac{AT}{ET}\frac{IE}{AE} = EM\frac{CM}{EM}\frac{CE}{AE} = BM\frac{BG}{AB},$$

即

$$BA \times BZ = BM \times BG,$$

则 $AZGM$ 共圆, 从而 $AZGMD$ 共圆, 故 $DZ \perp ZG$. □

不难发现当本题中 Z 与 F 重合时即为原题, 上述证明完全脱胎于证法 1, 此推广也是本人研究得到解法 1 以后, 顺势推广得到的. 这进一步说明证法 1 是最简洁而本质的. 当然也可以考虑类比剩下的七种方法证明此题, 应该也是可行的, 不过要比原来的证明复杂不少. 本证明还可以继续推广, 本文只是抛砖引玉, 有兴趣的读者可以进一步研究.