数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

正整数的斐波那契型数列表示

尹顺
(湖南师范大学附属中学, 410006)
指导教师: 汤礼达

2017 年美国国家队选拔考试 (USA-TST) 有下面的正整数的斐波那契型数列的表示问题:

问题 若正整数序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $n\geq 1$, 则称它是一个斐波那契型数列. 证明: 正整数集可划分成无穷多个斐波那契型数列的并.

这是一个令人惊诧的有趣的结果, 但它并不是新问题. 早在 2000 年匈牙利的 Kömal 杂志上, 它作为 A244 号问题而提出 (供题人: B.Enekes). Kömal 杂志上公布了该问题的三个解法. 美国 TST 官方网站提供的三个解法与前者本质相同. 这两个文献中的三个解均写得较为简略, 不易理解. 本人最近研究了这个问题, 重写了三个解法, 介绍如下.

证法一 先证明如下的 Zerkendorf 定理.

定理 对于斐波那契型数列 $F_0=F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\in\mathbb{N}$ 以及任意正整数 n, 存在 k 及 $1\leq i_1<\cdots<i_k$, 满足 $k\geq 1$, $i_{j+1}-i_j\geq 2$, $j=1,2,\cdots,k-1$, 使 $n=F_{i_1}+\cdots+F_{i_k}$ 且该数列 $(i_1,\cdots,i_k)$ 唯一.

定理证明 对 n 归纳证明 $i_1,\cdots,i_k$ 的存在性.

$n=1$ 时, 只能取 $i_1=1$; $n=2$ 时, 只能取 $i_2=2$.

假设对小于 n 的正整数结论成立, n 时, 若 n 为斐波那契型数列中的一项 F_j $(j\geq 2)$, 取 $i_1=j$ 即可.

若 n 不为斐波那契型数列中的一项, 则存在 $j\in\mathbb{N}_+$, 使 $F_j<n<F_{j+1}$, 则 $1\leq n-F_j<n$.

对 $n-F_j$ 使用归纳假设知存在 $1\leq i_1<\cdots<i_k$, 使得

$$i_{j+1}-i_j\geq 2,\ j=1,\cdots,k-1,$$

修订日期: **2018-11-30.**

且

$$n-F_j=F_{i_1}+\cdots+F_{i_k}.$$

由于 $F_{j-1}+F_j=F_{j+1}$, 所以 $F_{i_k}<F_{j-1}$, 因此 $i_k<j-1$, 即 $i_k\leq j-2$, 从而令 $i_{k+1}=j$ 即可, 满足条件.

综上, 存在性得证.

再证唯一性. 若存在 $1\leq i_1<\cdots<i_k$ 及 $1\leq j_1<\cdots<j_l$ 满足

$$i_{j+1}-i_j\geq 2,\ j=1,\cdots k-1,$$

$$j_{r+1}-j_r\geq 2,\ r=1,\cdots l-1,$$

且 $(i_1,\cdots,i_k)\neq(j_1,\cdots,j_l)$, $n=F_{i_1}+\cdots+F_{i_k}$. 容易看到

$$F_{i_1}+F_{i_2}<F_{i_2-1}+F_{i_2}=F_{i_2+1},$$

依此类推得

$$F_{i_k}\leq n<F_{i_k+1},$$

同理 $F_{j_l}\leq n<F_{j_l+1}$. 所以

$$F_{i_k}=F_{j_l}.$$

对 $n-F_{i_k}=n-F_{j_l}$, 同样讨论知 $(i_1,\cdots,i_k)=(j_1,\cdots,j_l)$ 产生矛盾!

于是唯一性得证, 故定理得证.

回到原题. 由 Zerkendorf 定理, 定义正整数的 “F 进制”, 即存在

$$n=a_kF_k+\cdots+a_1F_1=(a_k\cdots a_1)_{(F)},\ k\in\mathbb{N}_+$$

其中 $a_i\in\{0,1\}$, 对 $\forall i$, $a_ia_{i+1}=0$, $i=1,\cdots,k-1$, $a_k\neq 0$.

利用这种表示, 分别依 $a_1=1$; $a_1=0$, $a_2=1$; $a_1=a_2=0$, $a_3=1$;$\cdots$ 按行从小到大列出所有正整数:

$$\begin{array}{cccccc}
F_1 & F_1+F_3 & F_1+F_4 & F_1+F_5 & F_1+F_3+F_5 & \cdots \\
F_2 & F_2+F_4 & F_2+F_5 & F_2+F_6 & F_2+F_4+F_6 & \cdots \\
F_3 & F_3+F_4 & F_3+F_6 & F_3+F_7 & F_3+F_5+F_7 & \cdots \\
F_4 & F_4+F_6 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

上面每一列都是一个斐波那契型数列, 故按列把正整数集分划成了无穷多个斐波那契型数列.

从而命题得证. $\square$

证法二 对于 $x \in \mathbb{R}^*$, 考虑 $f(x)=\left[\varphi x+\frac{1}{2}\right]$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi^2=\varphi+1$.

引理 1 若 $a,\ b \in \mathbb{N}^*$, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a=b$.

引理 1 证明 我们可以用反证法, 不妨设 $b>a$, 则 $b \geq a+1$. 所以

$$\varphi b+\frac{1}{2} \geq \varphi(a+1)+\frac{1}{2}+\varphi>\left[\varphi a+\frac{1}{2}\right]+1,$$

因此

$$f(b)=\left[\varphi b+\frac{1}{2}\right] \geq\left[\varphi a+\frac{1}{2}\right]+1=f(a)+1.$$

与 $f(a)=f(b)$ 矛盾!

故引理 1 得证.

引理 2 对 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $f(f(n))=f(n)+n$.

引理 2 证明 注意到

$$\begin{aligned}
f(f(n)) &=\left[\varphi\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right] \\
&>\varphi\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}-1 \\
&=(\varphi-1)\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}-1+\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right] \\
&=\frac{\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]}{\varphi}+f(n)+\frac{1}{2}-1 \\
&>\frac{\varphi n-\frac{1}{2}}{\varphi}+f(n)+\frac{1}{2}-1 \\
&=n+f(n)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2 \varphi}-1 \\
&>n+f(n)-1,
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
f(f(n)) &=\left[\varphi\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right] \\
&\leq \varphi\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2} \\
&=(\varphi-1)\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}+\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right] \\
&=\frac{\left[\varphi n+\frac{1}{2}\right]}{\varphi}+\frac{1}{2}+f(n) \\
&\leq \frac{\varphi n+\frac{1}{2}}{\varphi}+\frac{1}{2}+f(n) \\
&=n+f(n)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2 \varphi} \\
&<n+f(n)+1,
\end{aligned}$$

所以

$$f(f(n)) = f(n) + n.$$

故引理 2 得证.

回到原题. 下面我们构造满足条件的无穷多个斐波那契型数列, 第 i 个斐波那契型数列的第 j 项用 $a_{i,j}$ 表示:

$$a_{1,1} = 1,\ a_{1,i+1} = f(a_{1,i}) = [\varphi a_{1,i+1} + \frac{1}{2}],\ \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

由引理 2, 它是斐波那契型数列.

假设第 $1, \cdots, k$ 个斐波那契型数列已经取好 $(k \in \mathbb{N}^*)$.

对第 $k+1$ 个斐波那契型数列, 取 $a_{k+1,1}$ 为不在前 k 个斐波那契型数列中出现的最小正整数,

$$a_{k+1,i+1} = f(a_{k+1}, i) = \left[\varphi a_{k+1,i} + \frac{1}{2}\right],\ \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

由引理 2, 那么这样得到的无穷多个斐波那契型数列, 显然每一个正整数均在某个数列中出现, 于是我们只用证明以上表示的数列不交.

若第 m 个斐波那契型数列与第 n 个斐波那契型数列相交, 不妨设 $m < n$, 这两个数列的公共项中小标最小的一项为 $x = a_{m,i} = a_{n,j}$, 则 $i > j \geq 1$. 显然 $j \neq 1$, 否则与 $a_{n,1}$ 的定义矛盾! 所以 $j > 1$. 而

$$a_{m,i} = f(a_{m,i-1}), a_{n,j} = f(a_{n,j-1})$$

所以

$$f(a_{m,i-1}) = f(a_{n,j-1}).$$

由引理 1, 有 $a_{m,i-1} = a_{n,j-1}$ 与 $a_{m,i},\ a_{n,j}$ 的选取矛盾!

于是任意取出的两个斐波那契型数列均不交.

从而命题得证. □

证法三 我们来归纳构造无穷多个这样的斐波那契型数列.

对于两个斐波那契型数列 $\{a_i\}_{i\geq 1}$ 和 $\{b_i\}_{i\geq 1}$, 若对某个 $i \in \mathbb{N}^*$, 有

$$a_i < b_1 < a_{i+1} < b_2 < a_{i+2},$$

则称 $\{a_i\}_{i\geq 1}$ 与 $\{b_i\}_{i\geq 1}$ "相隔". 此时归纳易证: $a_{i+n-1} < b_n < a_{i+n}$, 从而 $\{a_i\}_{i\geq 1}$ 与 $\{b_i\}_{i\geq 1}$ 不交.

用 A_i 表示我们将构造的第 i 个斐波那契型数列, $a_{i,j}$ 表示 A_i 的第 j 项, 则

$$A_1:\ a_{1,1} = 1,\ a_{1,2} = 2,\ \cdots;$$

$$A_2:\ a_{2,1}=4,\ a_{2,2}=6,\ \cdots.$$

假设 $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 已取好 $(k\geq 3)$.

对 A_k, 取 $a_{k,1}$ 为最小的不在 $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 中的数,

$$a_{k,2}=2a_{k,1}-k,$$

并注意到 $k=2$ 时该等式也成立, 从而对 $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ k\geq 2$ 均成立.

$$a_{k,j+2}=a_{k,j+1}+a_{k,j}, j\geq 1,$$

这样取出了无穷多个斐波那契型数列.

我们要证明以上构造的数列中任意两个数列都是相隔的, 那么他们不交, 且含所有正整数, 也就完成了证明. 为此我们使用数学归纳法.

定义 a_{i,i_j} 为 A_j 中在 $a_{n,1}$ 之前出现的最大的元素. 数列个数为 2 时, 由于

$$a_{1,3}=3<a_{2,1}=4<a_{1,4}=5<a_{2,2}=6<a_{1,5}=8,$$

故 A_1 与 A_2 "相隔". 假设数列个数小于 n 时, 结论成立 $(n\geq 3)$.

结论 1 $\{a_{1,i_1},a_{2,i_2},\cdots,a_{n-1,i_{n-1}}\}=\{a_{n,1}-(n-1),a_{n,1}-(n-2),\cdots,a_{n,1}-1\}$.

证明 我们用反证法. 若断言错误, 则存在两个元素在某个 A_{j1} 中, 也在 $\{a_{n,1}-(n-1),\cdots,a_{n,1}-1\}$ 中. 从而由抽屉原理, 存在某个 A_{j_2}, 满足

$$a_{j_2,i_{j_2}}<a_{n,1}-(n-1)\leq a_{j_1,i_{j_1}-1}<a_{j_1,i_{j_1}}<a_{j_2,i_{j_2}+1},$$

则可推出 A_{j_1} 与 A_{j_2} 不相隔. 这与归纳假设矛盾!

故结论 1 得证.

结论 2 对任意 $j\in\{1,\cdots,n-1\}$, $a_{j,i_j+2}>a_{n,2}$.

证明　由结论 1, 有 $a_{i,i_j}\geq a_{n,1}-n+1,\ \forall j\in\{1,\cdots,n-1\}$.

由 i_j 定义知 $a_{i,i_j+1}\geq a_{n,1}+1$. 从而

$$\begin{aligned}a_{j,i_j+2}=a_{j,i_j+1}+a_{j,i_j}&\geq(a_{n,1}+1)+a_{n,1}-n+1\\&=2a_{n,1}-n+2\\&=a_{n,2}+2>a_{n,2}.\end{aligned}$$

故结论 2 成立.

结论 3 对任意 $j\in\{1,\cdots,n-1\}$, 若 $i_j\geq 2$, 则 $a_{j,i_j+1}<a_{n,2}$.

证明　$a_{j,i_j}\leq a_{n,1}-1$, 由结论 1 有 $a_{j,i_j-1}\leq a_{n,1}-n$. 所以

$$\begin{aligned}a_{j,i_j+1}=a_{j,i_j}+a_{j,i_j-1}&\leq(a_{n,1}-1)+(a_{n,1}-n)\\&=2a_{n,1}-n-1=a_{n,2}-1<a_{n,2}.\end{aligned}$$

故结论 3 成立.

结**论 4** 对任意 $j \in \{1, \cdots, n-1\}$, 若 $i_j = 1$, 则 $a_{j,i_j+1} = a_{j,2} < a_{n,2}$.

证明　由构造特点有 $a_{1,1} < a_{2,1} < a_{3,1} < \cdots$, 从而

$$a_{j_1} \leq a_{n,1} - (n-j) < a_{n,1} - \frac{n-j}{2},$$

故可以推出 $2a_{j,1} - j < 2a_{n,1} - n$. 由定义, 应有

$$a_{n,1} > a_{2,1} = 4 > a_{1,2},$$

从而 $j \neq 1$, 故有 $2a_{j,1} - j = a_{j,2}$. 因此

$$a_{j,2} < a_{n,2}.$$

故结论 4 成立.

综上, 由结论 2,3,4, 对任意 $j \in \{1, \cdots, n-1\}$, 有

$$a_{j,i_j} < a_{n,1} < a_{j,i_j+1} < a_{n,2} < a_{j,i_j+2}.$$

故命题得证. □