

数学新星问题征解

第三十一期 (2019.02)

主持: 牟晓生

第一题. 在不等边三角形 ABC 中, I 为内心, M 为 BC 中点. 直线 MI 与 AC 交于点 Q_B , P_B 为 $\triangle ABC$ 外接圆弧 AC 的中点, D_B 为 $\triangle P_B Q_B I$ 与 $\triangle AIC$ 两个外接圆的第二个交点. 类似定义 Q_C, P_C, D_C . 证明: $D_B D_C$ 的中点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(浙江镇海中学学生 骆晗 供题)

第二题. 设 $n > k$ 是正整数, $p > 3$ 是素数. 证明:

$$\binom{pn}{pk} \equiv \binom{n}{k} \pmod{p^{v_p(n)+3}}.$$

(北京大学学生 陈泽坤 供题)

第三题. 设 k 是正整数, $x \geq k$ 是实数. 给定由至多 $\binom{x}{k}$ 个 k 元集合构成的集族 \mathcal{F} , 证明: 至多存在 $\binom{x}{k+1}$ 个 $k+1$ 元集合, 满足它们的所有 k 元子集均属于 \mathcal{F} .

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

第四题. 给定平面上 n 个模长不超过一的向量, 它们的和为零向量. 证明: 对每个 $k \leq n$, 存在其中某 k 个向量, 它们和的模长不超过一.

(耶鲁大学 牟晓生 供题)