n 阶“完系和”集合

冯跃峰

考虑这样的实际问题:

假定有 n 个砝码, 其重量分别为 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$. 若将这些砝码放在天平的一端, 可以称出质量为 1 到 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 中所有整数的物品, 那么, 这些砝码应满足怎样的条件?

用集合语言将上述问题数学化, 则得到如下的问题:

问题 用 $S(A)$ 表示有限数集 A 中所有元素的和, 简称为 A 的和. 设 $X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$, 其中 $a_i \in \mathbb{N}^+$, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$. 如果 X 的各个子集的“和”跑遍模 $S(X)$ 的完系, 即对任何正整数 $a \in [1, S(X)]$, 都存在 X 的子集 A, 使 $S(A) = a$, 则称 X 是 n 阶“完系和”集合. 试求 X 是 n 阶“完系和”集合的充分必要条件.

【题感】 从目标看, 所谓集合满足的充分必要条件, 实际上就是其元素满足的等式或不等式.

从规则看, 所谓“完系和”集合, 就是各子集的“和”取遍 $[1, S(X)]$ 中的所有整数.

如果同时考虑取到 1 到 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 的所有整数则比较困难, 可采用局部扩展的策略: 依次考虑有子集的和取到整数 $1, 2, \cdots$, 由此发现其元素具有的性质.

【局部扩展】 先考虑有子集的和取到整数 1, 这就要求至少有一个数不大于 1, 所以 $a_1 = 1$.

再考虑有子集的和取到整数 2, 此时, 必有另一个元素为 1 或 2, 所以 $a_2 \leq 2$.

实际上, 如果 $a_2 \geq 3$, 则不含 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中任何数的非空子集的和为 1, 而含有 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 之一的子集的和至少是 3, 从而没有子集的和为 2, 矛盾!

收稿日期: **2019-02-18.**

继续考虑有子集的和取到整数 3, 此时, 由于 a_2 的值不唯一确定, 有以下两种情况:

(1) 如果 $a_2=1$, 则用元素 a_1 和 a_2 能产生和为 1,2 的子集, 接着考虑有子集的和取到整数 3, 类似上面的分析, 必有另一个元素为 1,2 或 3, 所以 $a_3\le 3$.

(2) 如果 $a_2=2$, 则用元素 a_1 和 a_2 能产生和为 1,2,3 的子集, 接着考虑有子集的和取到整数 4, 类似上面的分析, 必有另一个元素为 1,2,3 或 4, 所以 $a_3\le 4$.

【归纳通式】 上面得到 $a_1=1, a_2\le 2$, 而 a_3 的上界有两种情况: 或者 $a_3\le 3$ (当 $a_2=1$), 或 $a_3\le 4$ (当 $a_2=2$).

注意 a_3 的上界是不能统一的, 它依据 a_2 的取值不同而不同, 因此无法得到任一项 a_i 的统一上界, 只能立足于归纳 a_i 与前面各项之间的递归关系.

先考虑 a_2 与 a_1 的关系, 显然有 $a_2\le 2=1+a_1$.

再考虑 a_3 与 a_2 的关系, 有两种情况:

(1) 若 $a_2=1$, 则 $a_3\le 3$. 再注意到 $a_1=1$, 我们发现, 此时 a_3 的上界 3 用前面的项 a_1,a_2 可表示为 a_1+a_2+1, 即 $a_3\le a_1+a_2+1$;

(2) 若 $a_2=2$, 则 $a_3\le 4$. 再注意到 $a_1=1$, 我们发现, 此时 a_3 的上界 4 也可用前面的项 a_1,a_2 表示为 a_1+a_2+1, 即 $a_3\le a_1+a_2+1$.

由此发现, 上述各个关系可统一用“通式”表述如下: 对每一个 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i\le S_{i-1}+1$, 其中 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$, $S_0=0$.

进一步猜想, 这就是所求的充分必要条件, 即有如下的“完系和”定理:

定理 集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ $(a_i\in\mathbb{N}^+, a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n)$ 是 n 阶“完系和”集合的充分必要条件是, 对每个 i $(1\le i\le n)$, 都有 $a_i\le S_{i-1}+1$, 其中 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$, $S_0=0$.

【证明】 先证必要性.

设 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ $(a_i\in\mathbb{N}^+,\ a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n)$ 是 n 阶“完系和”集合, 要证明: $a_i\le S_{i-1}+1$.

由前面特例的启发, 容易想到采用用反证法: 反设存在 i $(1\le i\le n)$, 使 $a_i\ge S_{i-1}+2$ (间隙过宽), 我们证明没有子集的和取到整数 $S_{i-1}+1$.

【直观思路】 自然想到: 不含“大元素”的子集的和都小于 $S_{i-1}+1$, 而含“大元素”的子集的和都大于 $S_{i-1}+1$, “跳过”了 $S_{i-1}+1$.

实际上, 对 X 的任一不含 $a_i, a_i+1,\cdots,a_n$ 中任何元素的子集 A, 有

$$S(A)\le a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=S_{i-1};$$

而对 X 的任一含有 $a_i, a_i+1, \cdots, a_n$ 中至少一个元素的子集 A, 有

$$S(A) \geq a_i \geq S_{i-1}+2.$$

于是, 不存在 X 的子集 A, 使 $S(A)=S_{i-1}+1$, 矛盾!

再考虑充分性.

假定 $X_n=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ $(a_i \in \mathbb{N}^{+}, a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n)$ 满足 $a_i \leq S_{i-1}+1$ $(1 \leq i \leq n)$, 我们证明 X_n 是 n 阶“完系和”集合.

对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, 由 $a_1 \leq S_0+1=1$, 得 $a_1=1$, 所以 $X_1=\{1\}$, 此时结论显然成立.

设结论对 n 成立, 考察 $n+1$ 的情形, 此时 $X_{n+1}=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}\}$, 其中 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{n+1}$, $a_k \leq S_{k-1}+1$ $(k=1,2, \cdots n+1)$.

【瞄准目标】 证明 X_{n+1} 的所有子集的和跑遍 1 到 S_{n+1}, 注意到归纳假设, 自然可将目标分割为两段: 一段是由归纳假设可知, X_{n+1} 的不含 a_{n+1} 的子集的和跑遍 $1,2, \cdots, t$. 其中 $t=S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

另一段是, 构造若干个子集, 使其和跑遍 $S_n+1, S_n+2, \cdots, S_{n+1}$.

【充分条件】 这当然要利用已知条件 $a_{n+1} \leq S_n+1$, 由此想到如下的一个充分条件: 构造若干个子集, 使其和跑遍 $a_{n+1}, a_{n+1}+1, a_{n+1}+2, \cdots, S_{n+1}$.

这是容易解决的，采用局部扩展技巧即可.

【局部扩展】 先考虑有子集的和取到整数 a_{n+1}, 自然取一个子集为 $A_0=\{a_{n+1}\}$.

再考虑有子集的和取到整数 $a_{n+1}+1$, 自然取一个子集为 $\{a_{n+1}\} \cup\{1\}$.

一般地，考虑有子集的和取到整数 $a_{n+1}+j$ $(1 \leq j \leq t)$, 自然取一个子集为 $\{a_{n+1}\} \cup\{A_j\}$, 其中 $S(A_j)=j$, 且 A_j 不含 a_{n+1}. 由归纳假设, 这样的子集存在.

【通式构造】 这样, 考察以下 $t+1$ 个子集:

$$\{a_{n+1}\},\{a_{n+1}\} \cup A_1,\{a_{n+1}\} \cup A_2, \cdots,\{a_{n+1}\} \cup A_t,$$

它们的和跑遍 $a_{n+1}, a_{n+1}+1, a_{n+1}+2, \cdots, a_{n+1}+t$.

因为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 的和跑遍 $[1, t]$ 中的所有整数, 所以

$$A_1, A_2, \cdots, A_t,\{a_{n+1}\},\{a_{n+1}\} \cup A_1,\{a_{n+1}\} \cup A_2, \cdots,\{a_{n+1}\} \cup A_t$$

的和跑遍 $[1, t] \cup[a_{n+1}, a_{n+1}+t]$ 中的所有整数. 又

$$1 \leq a_{n+1} \leq S_n+1=t+1, a_{n+1}+t=a_{n+1}+S_n=S_{n+1},$$

所以

$$[1, t] \cup[a_{n+1}, a_{n+1}+t]=[1, S_{n+1}],$$

所以 S_{n+1} 是 $n+1$ 阶完系和集合, 结论成立.

综上所述, 定理获证. $\square$

下面介绍该定理的两个特例.

推论 1 (一个必要条件) 设 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是由正整数构成的集合, 其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$, 若 X 是"完系和"集合, 则对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i \le 2^{i-1}$.

【证明】 记 $S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, $S_0=0$, 由定理, 对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i \le S_{i-1}+1$. 于是,"消元", 得

$$S_i-S_{i-1} \le S_{i-1}+1,\ S_i \le 2S_{i-1}+1, S_i+1 \le 2(S_{i-1}+1),$$

迭代, 得

$$\begin{aligned} S_i+1 \le & 2(S_{i-1}+1) \le 2^2(S_{i-2}+1) \le 2^3(S_{i-3}+1) \\ & \le \cdots \le 2^{i-1}(S_1+1)=2^{i-1}(1+1)=2^i. \end{aligned}$$

所以 $S_i \le 2^i-1$, 故 $a_i \le S_{i-1}+1 \le (2^{i-1}-1)+1=2^{i-1}$. 证毕. $\square$

推论 2 (一个充分条件) 设 $n \ge 2$, $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是由正整数构成的集合, 其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$ 如果对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i \le i$, 则 X 是"完系和"集合.

证明 因为 X 中的所有数都是正整数, 从而对任何正整数 i, 有 $S_i \ge i$, 于是由 $a_i \le i$, 有

$$a_i \le i=(i-1)+1 \le S_{i-1}+1.$$

由"完系和"定理, 结论成立. $\square$

由推论 2 可得到如下一个有趣结论:

如果"完系和"集合的所有不同子集的和不同, 则称之为无重叠"完系和"集合. 那么, 唯一一个 n 阶无重叠"完系和"集合为:

$$X_0=\{2^0,2^1,2^2,\cdots,2^{n-1}\}.$$

实际上, 设 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是 n 阶无重叠"完系和"集合, 其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$, 则由推论 2 可知, 对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i \le 2^{i-1}$. 于是

$$S(X)=a_1+a_2+\cdots+a_n \le 2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

另一方面, 由于 X 的所有不同子集的和不同, 不妨设所有非空子集为 $A_i\ (1 \le i \le 2^n - 1)$, 满足 $1 \le S(A_1) < S(A_2) < \cdots S(A_t)$, 其中 $t = 2^n - 1$. 于是,

$$S(A_1) \ge 1, S(A_2) \ge 2, \cdots, S(A_t) \ge t = 2^n - 1,$$

所以

$$S(X) \ge 2^n - 1.$$

因此以上所有不等式成立等号, 从而 $a_i = 2^{i-1}\ (1 \le i \le n)$, 故

$$X_0 = \{2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}.$$

下面介绍应用该定理及推论的几个例子.

例 1 设 $n \ge 2$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数, $a_k \le k\ (1 \le k \le n)$. 求证: 当且仅当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是偶数时, 可以适当选取“$+$”和“$-$”号, 使得 $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$.

(1990 年全国中学生数学冬令营选拔试题)

【题感】 利用“完系和”定理的推论 2, 该题几乎不成为一个问题.

从条件看, 由推论 2, $X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 是“完系和”集合.

从目标看, 要证 $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$, 这可通过移项, 转化为存在子集取到 $[1, S_n]$ 中的一个值, 问题迎刃而解.

【结构联想】 因为 $a_k \le k\ (1 \le k \le n)$, 所以由“完系和”定理推论 2, $X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 是“完系和”集合. 于是, 对任何整数 $p \in [1, S_n]$, 都存在 X 的子集 A, 使 $S(A) = p$.

【创造条件】 考察目标: $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$, 可构造集合的“和”. 将其负项移到等式的另一边, 则目标可变形为

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_s} = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_t}, \tag{$*$}$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_s, j_1, j_2, \cdots, j_t$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

令集合 $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s}\}$, $B = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$, 则 $(*)$ 式可表示为 $S(A) = S(B)$, 其中 $S(A)$ 表示 A 中元素的和.

注意到 $A \cup B = X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 有

$$2S(A) = S(A) + S(B) = S(X),\ S(A) = \frac{1}{2}S(X).$$

由条件, $S(X)$ 为偶数, 从而 $S(X)$ 是不超过 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的正整数, 取

$$p = \frac{1}{2}S(X),$$

故原命题获证. $\square$

例 2 给定 $k, n \in \mathbb{N}^+$, $n < 2k$, A 是由正整数组成的允许含有重复元素的集合, $|A| = k$, 满足 $S(A) = n$, 其中 $S(A)$ 表示 A 中各元素的和. 求证: 对任何自然数 $q\ (1 \le q \le n)$, 都存在 $Q \subseteq A$, 使 $S(Q) = q$.

(1996 年数学通讯赛试题)

【题感】 本题原解答很繁, 且存在漏洞. 若利用“完系和”定理, 则它也几乎算不上一个问题.

从目标看, 本题实际上是要证明: A 是 k 阶完系和集合.

这当然可设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_k$, 由“完系和”定理, 我们只需证明 A 满足 $a_i \le S_{i-1} + 1\ (i = 1, 2, \cdots, k)$, 这用反证法是很容易的 (导出与 $S(A) = n < 2k$ 矛盾).

【问题转化】 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_k$. 我们证明 A 满足

$$a_i \le S_{i-1} + 1\ (i = 1, 2, \cdots, k).$$

【反面思考】 若存在 $1 \le i \le k$, 使 $a_i \ge S_{i-1} + 2$, 则

$$\begin{aligned} S(A) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k = S_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + \cdots + a_k) \\ &\ge S_{i-1} + (k - i + 1)a_i \ge S_{i-1} + (k - i + 1)(S_{i-1} + 2) \\ &= (k - i + 2)S_{i-1} + 2(k - i + 1) \\ &\ge (k - i + 2)(i - 1) + 2(k - i + 1) \\ &= -i^2 + (k + 1)i + k. \end{aligned}$$

令 $f(i) = -i^2 + (k + 1)i - k$, 则因关于 i 的二次函数 $f(i)$ 的图象开口向下, 由于其图象可知, 当 $1 \le i \le k$ 时, $f(i) \ge \min\{f(1), f(k)\}$.

又

$$f(1) = -1 + (k + 1) + k = 2k,\ f(k) = -k^2 + (k + 1)k + k = 2k,$$

于是恒有 $f(i) \ge 2k$. 所以

$$2k > n = S(A) \ge f(i) \ge 2k,$$

矛盾! 因此

$$a_i \le S_{i-1} + 1\ (i = 1, 2, \cdots, k),$$

由“完系和”定理, A 是 k 阶完系和集合, 命题获证. $\square$

例 3 给定正整数 a, 设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是由正整数构成的集合, 其中 $a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n$, 且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a$, 若对任何整数 $p\,(1\le p\le a)$, 都存在 X 的子集 A, 使 $S(A)=p$, 其中规定 $S(A)$ 为集合 A 中的元素的和, 求 n 的最小值. (原创题)

【题感】 从目标看, 本题就是要将给定的正整数 a, 分割为个数最少的若干个数的和, 使这些数构成的集合是“完系和”集合.

从条件看, 尽管 a 是给定的, 但不是具体数, 给如何分割带来困难, 从而可从特例开始, 探索分割规律.

【研究特例】 取 $a=10$, 设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是使 $S(X)=10$ 的“完系和”集合, 那么 X 的子集的和跑遍 $[1,10]$ 中的所有整数. 由推论 1, 对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i\le 2^{i-1}$. 于是

$$a_1+a_2+a_3\le 2^0+2^1+2^2=2^3-1=7<10,$$

从而 $n\ge 4$.

又 $n=4$ 时, 尽可能取 2 的幂属于集合 X (最多剩下最后一个数非 2 的幂), 可取 $X=\{1,2,4,3\}$, 则 X 是 4 阶“完系和”集合, 从而此时 n 的最小值为 4.

再取 $a=100$, 设 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是使 $S(X)=100$ 的“完系和”集合, 那么 X 的子集的和跑遍 $[1,100]$ 中的所有整数.

同样由推论 1, 对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i\le 2^{i-1}$. 于是,

$$a_1+a_2+\cdots+a_6\le 2^0+2^1+\cdots+2^5=2^6-1=63<100,$$

从而 $n\ge 7$.

又 $n=7$ 时, 取 $X=\{1,2,4,8,16,32,37\}$, 则 X 是 7 阶“完系和”集合, 从而此时 n 的最小值为 7.

上述结果可直接推广到一般情况, 而且是平凡推广.

【归纳通式】 对一般情形, 假定 a 已分解为 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a$, 使 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 是“完系和”集合, 则由推论 1, 对任何 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $a_i\le 2^{i-1}$. 进而, 有

$$a=S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\le 2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}=2^n-1. \qquad (*)$$

【划分数列】 由此想到以 2 的幂数列作划分数列来分割给定的正整数 a.

对给定的 a, 不妨设 $2^r\le a<2^{r+1}$, 由 $(*)$, 容易证明 $n=|X|\ge r+1$. 否则, $n\le r$, 由 $(*)$, 有

$$a\le 2^n-1\le 2^r-1<2^r\le a,$$

矛盾! 所以 $n \geq r+1$. 又由 $2^r \leq a < 2^{r+1}$, 两边取对数, 得 $r \leq \log_2 a < r+1$, 从而 $r = [\log_2 a]$. 因此

$$n \geq [\log_2 a] + 1.$$

【通式构造】 当 $n = r+1$ 时, 其中 $r = [\log_2 a]$, 尽可能取 2 的幂属于集合 X, 令

$$a_i = 2^{i-1}\ (i = 1, 2, \cdots, r),\ a_{r+1} = a + 1 - 2^r,$$

则 $X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{r+1}\}$ 满足条件.

【验证性质】 实际上,由二进制可知, X 的不含有 a_{r+1} 的子集 (即 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r\}$ 的子集) 的和跑遍了 $1, 2, \cdots, 2^r - 1$ 这些数.

不妨设 X 的 $2^r - 1$ 个子集 A_i 满足 $S(A_i) = i\ (1 \leq i \leq 2^r - 1)$.

考察 X 的含有 a_{r+1} 的 $2^r - 1$ 个子集: $A_i \cup \{a_{r+1}\}\ (1 \leq i \leq 2^r - 1)$, 其和跑遍了

$$a_{r+1}, a_{r+1} + 1, a_{r+1} + 2, \cdots, a_{r+1} + 2^r - 1 = a.$$

因为由 $2^r \leq a < 2^{r+1}$, 有

$$a_{r+1} = a + 1 - 2^r < 2^{r+1} + 1 - 2^r = 2^r + 1,$$

所以 $a_{r+1} \leq 2^r$.于是

$$\{1, 2, \cdots, 2^r - 1\} \cup \{a_{r+1}, a_{r+1} + 1, a_{r+1} + 2, \cdots, a\} = \{1, 2, \cdots, a\}.$$

故 X 的子集的和跑遍了 $1, 2, \cdots, a$.

综上所述, n 的最小值为

$$[\log_2 a] + 1.$$

$\square$