一道几何问题的推广

付艺渲
(山东省实验中学, 250002)

本文的讨论源于下面已知几何问题的研究:

题目 $\triangle ABC$ 中, D 为 $\angle C$ 平分线上一点, 在其垂足圆上取任意一点 H, 射线 CH 交 $\odot GDH$ 于 I. 证明: DI 为 $\angle AIB$ 的内或外角平分线 (图 1 为内角平分线).

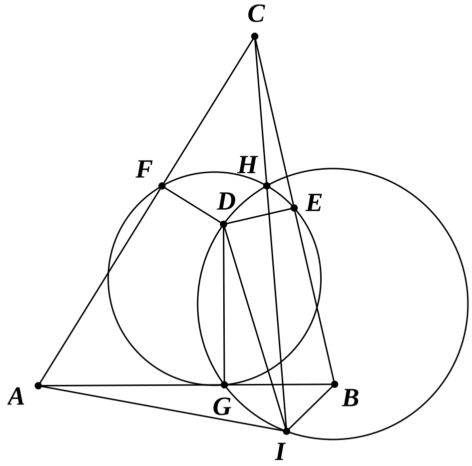

图 1

若 D 为 $\triangle ABC$ 的内心 I, 这一问题是为人所熟知的 (困难的) 命题. 事实上, 可以将问题进一步推广为下述形式:

命题 1 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, D,E,F 分别是 BC,CA,AB 上的点, $\triangle DEF$ 对 $\triangle ABC$ 的密克点为 P. G 是 $\odot DEF$ 上的点, AG 与 $\odot PDG$ 交于 H, HP 与 $\odot BHC$ 交于 X. AP 与 $\odot ABC$ 交于 S. 求证: $SX \parallel PD$.

笔者在探索这个问题的过程中, 发现了关于等角共轭点和圆锥曲线的一些有趣的几何性质. 囿于相关资料的缺乏和个人能力所限, 得到的结果可能并非独

收稿日期: 2018-11-13.

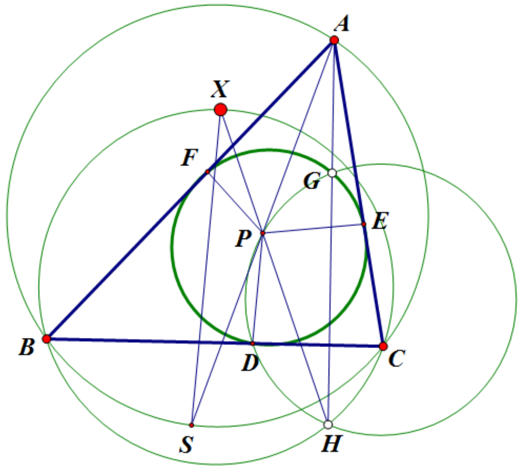

图 2

创的, 在这里恳请广大读者指正.

I. 一些基本的引理

我们首先作出如下约定:

1. 文章中将多次出现这样的描述: B 在某个圆 ω 上, AB 与圆 ω 再次交于点 C, 这是指在直线 AB 上取点 C 满足 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\rho(A)$, 其中 $\rho(A)$ 为 A 到圆 ω 的幂.

2. 对于 $\triangle ABC$, φ 是以 A 为中心, $\sqrt{AB\cdot AC}$ 为半径的反演变换, θ 是以 $\angle BAC$ 的平分线为对称轴的反射变换. $H=\varphi\cdot\theta$, 则称 H 为 Iran 式反演. 在不致引起误解的情形下, 简写为以 A 为中心的 Iran 式反演.

本小节建立如下几个引理.

引理 1 设 P,Q 为关于 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点, 以 A 为中心作 Iran 式反演, P,Q 的像点仍为关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

证明 利用反演变换的保角性可以证得结论. □

这个结论在指出之后是显然的. 它表明取等角共轭点和作 Iran 式反演这两个映射满足交换律.

引理 2 $\triangle ABC$ 的一条外接圆锥曲线的关于三角形本身的等角共轭像为一条直线.

证明 如图 3, 设 P,Q,R 是锥线上三点, P_1,Q_1,R_1 分别为 P,Q,R 的等角共轭点, 则

$$[AB,AP_1;AQ_1,AR_1]=[AC,AP;AQ,AR]$$

$$
\begin{aligned}
&= [BC, BP; BQ, BR] \\
&= [BA, BP_1; BQ_1, BR_1].
\end{aligned}
$$

其中 $[l_1, l_2; l_3, l_4]$ 表示四条直线的交比.

由交比的几何性质可得 P_1, Q_1, R_1 三点共线.

故引理获证. $\square$

值得注意的是上述命题 (引理 2) 的逆命题也是正确的, 即一条不过 A, B, C 三点的直线关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭像为 $\triangle ABC$ 的外接圆锥曲线.

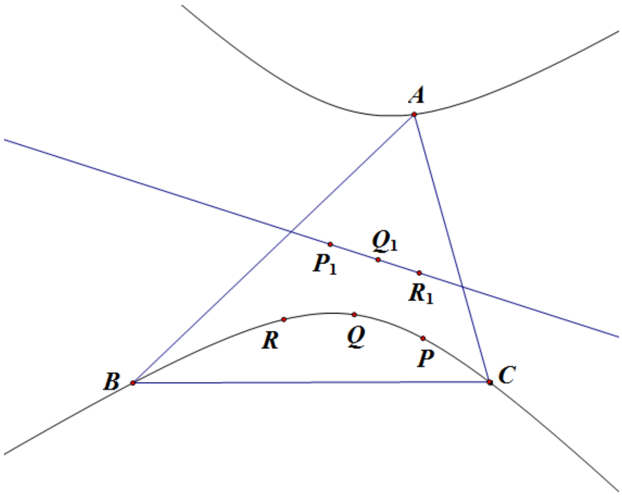

图 3

引理 3 给定 $\triangle ABC$, D 是平面上一点, AD 与 $\odot BCD$ 再次交于点 P. 则 P 在 $\triangle ABC$的定外接锥线上等价于 D 在过 A 的定圆上.

证明 如图 4, 取 P 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点 Q, 则 $\angle BAQ = \angle DAC$, 且

$$\angle ABQ = 180^\circ - \angle PBC = 180^\circ - \angle PDC = \angle ADC.$$

故$\triangle ABQ \sim \triangle ADC$. 那么$AD \cdot AQ = AB \cdot AC$.

以 A 为中心作 Iran 式反演, 则 D 的像为 Q, 过 A 的定圆的像为不过 A 的一条直线. 结合引理 2 可知下面三个叙述相互等价:

(1) D 在过 A 的定圆上;

(2) Q 在定直线上;

(3) P 在 $\triangle ABC$ 的定外接锥线上.

故引理获证. $\square$

II. 原问题的证明

我们先来证明如下的结果:

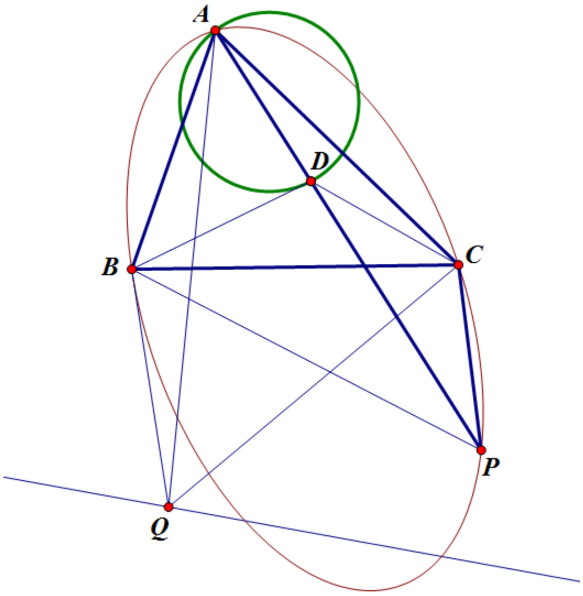

图 4

结论 1 如图 5, 设 E,F 为 AC,AB 上的定点, D 为一定点, $\odot BDF$ 和 $\odot CDE$ 再次交于点 P. G 为 $\odot DEF$ 上一动点. AG 与 $\odot GPD$ 再次交于点 H, HP 与 $\odot BHC$ 再次交于点 X. 则 X 在定直线上.

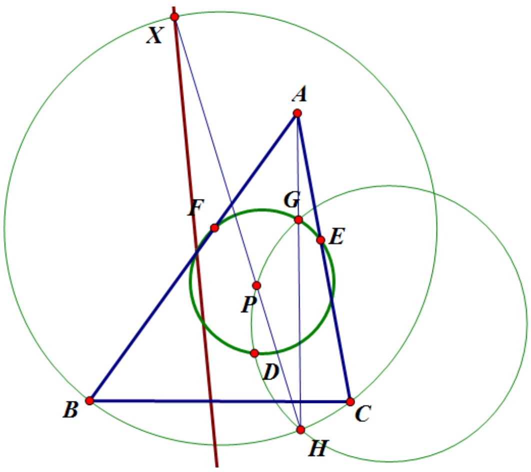

图 5

证明 首先我们以 P 为中心作反演变换, 为方便起见, 反演变换后点的字母仍保持不变.

我们现在只需要证明下面的命题:

如图 6, 若 C,B 是 DE,DF 上的两定点, A 为一定点, $\odot EAC$ 和 $\odot BAF$ 再次交于点 P,G 是 $\odot DEF$ 上一点, DG 与 $\odot PAG$ 再次交于点 H. HP 与 $\odot BCH$ 再次交于点 X, 则 X 在一个 (广义) 圆周上.

对 $\triangle PAD$ 和点 H 应用引理 3, 知 H 在一条 $\triangle PAD$ 的外接锥线上. 根据

条件, 显然有 B, C 在这个轨迹上. 因此, H 在一条过 P, B, C 三点的锥线上. 对 $\triangle PBC$ 和 H 点应用引理 3, 知 X 在定圆上.

命题获证. $\square$

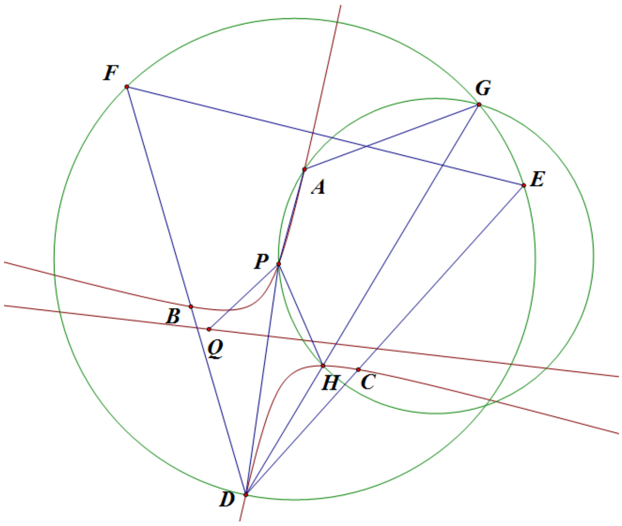

图 6

可以看到, 这个结果某种程度上是命题 1 的推广, 为了得到命题 1 的证明, 我们还需要做一些额外的工作, 这里的做法是取 G 为一些特殊的点来确定 X 所在的定直线. 以下我们回到命题 1 的图形.

首先, 取 A, G, P, D 四点共圆, 则 $H = A, X = S$. 其次, 取 A, G, D 三点共线, 则 $H = D$. $\odot BHC$ 退化为直线 BC, PD 与 $\odot BHC$ 的另一个交点为 PD 方向上的无穷远点. 从而 X 的轨迹为一条过 S 点且平行于 PD 的直线.

G 点另外的取法有很多, 其中大部分对应的结果是非平凡的.

这样考虑问题稍显复杂, 但的确揭示了背景. 事实上同样有初等的做法, 而且并不是很复杂,在这里略述思路.

设 $\odot PDG$ 与 BC 再次交于点 Y, 过 S 作 PD 的平行线与 BC 交于点 U, PH与 BC 交于点 V, 则只需证明 $VB \cdot VC = VU \cdot VY$, 这等价于 $[B, C; V, Y] = \frac{UB}{UC}$. 注意到 $[B, C; V, Y] = [PB, PC; PH, PY]$, 以 P 为中心, 任意半径反演, 导角可得

$$\angle BPH = \angle AGE, \angle CPH = \angle AGF.$$

从而有

$$\frac{\sin \angle CPH}{\sin \angle BPH} = \frac{\sin \angle FGA}{\sin \angle EGA},$$

$$\frac{\sin \angle CPY}{\sin \angle BPY} = \frac{\sin \angle CPY}{\sin \angle BDY} = \frac{GE}{GF},$$

$$\frac{\sin\angle CPH/\sin\angle BPH}{\sin\angle CPY/\sin\angle BPY}=\frac{GF\cdot\sin\angle AGF}{GE\cdot\sin\angle AGE}=\frac{AF}{AE}.$$

余下的工作是平凡的.

III. 相关问题及其证明

下面的结果都来自林扬渊.

1. 已知 D 为 P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆上一点, AD 交 $\odot DPX$ 于另一点 E. 求证: $\odot APX$ 与 P 关于 $\triangle EBC$ 的垂足圆的另一交点在 AE 上, P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆与 P 关于 $\triangle EBC$ 的垂足圆的另一交点在 AE 上.

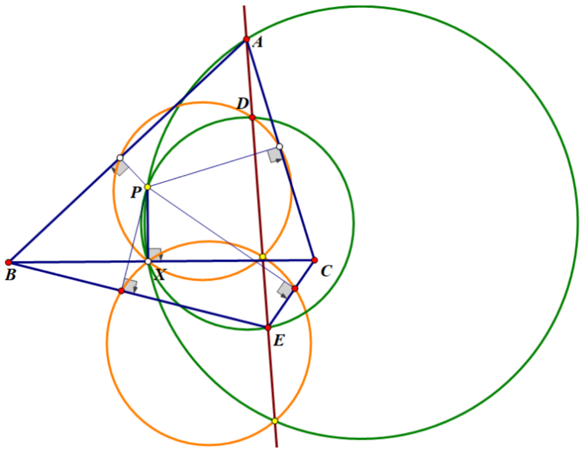

图 7

证明 我们通过以 P 为中心反演来证明这个命题, 原问题等价于:

设 P 在 EF 上的垂足为 A, G 是 $\odot DEF$ 上任意一点, DG 与 $\odot PAG$ 再次交于点 H, 过 H 作 PH 的垂线与 DE, DF 交于 J, K. 求证: $\odot PAG$ 和 $\odot DJK$ 的交点, 一个在 $\odot DEF$ 上, 一个在直线 AD 上.

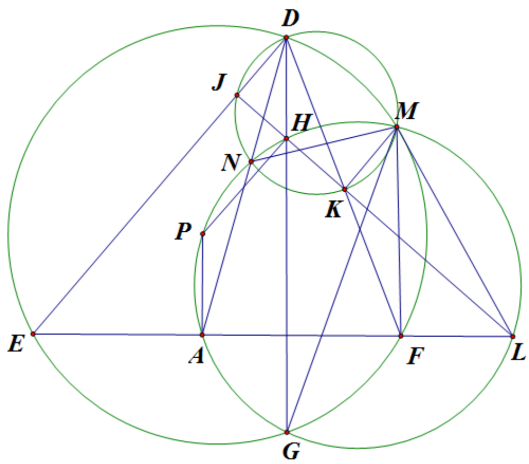

图 8

延长 JK 与 EF 交于 L, 则 P,A,G,L,H 五点共圆.

设完全四边形 $DJEFLK$ 的密克点为 M, $\odot DJKM$ 再次交 AD 于 N.

由于 $\angle MLK=\angle MFK=\angle MGH$, 因此 M,L,G,H 四点共圆. 即 M 在 $\odot PAG$ 上. 由于 $\angle MND=\angle MKD=\angle MLF$, 因此 M,N,A,L 四点共圆. □

2. E,F 在 AC,AB 上, $\odot BFP$, $\odot CEP$ 共点于D, G 为 $\odot DEF$ 上一点, AG 交 $\odot DPG$ 于 H, $\odot BPH$ 交 AB 于 J, $\odot CPH$ 交 AC 于 K, 求证: $EF\parallel JK$. (原要求 D 在 BC 上, 但这不必要)

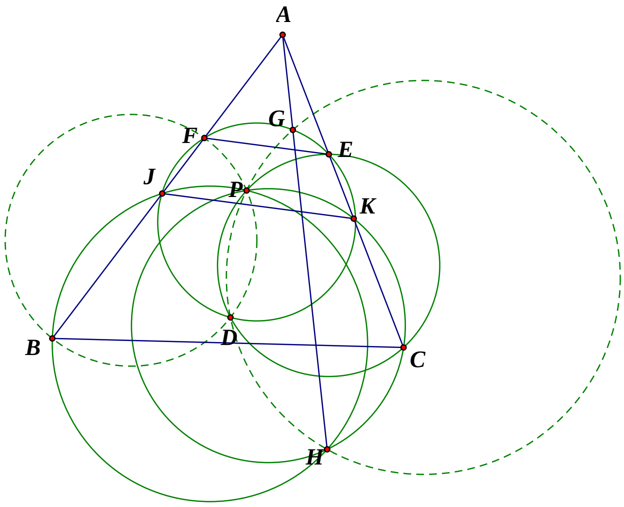

图 9

证明 同样以 P 为中心反演. 则只要证明: $\odot JPK$ 与 $\odot EPF$ 切于点 P. 将 G 视为动点, 当 D,P,G 共线时, $H=P, J=B, K=C$, 因此只需要证明, 当 G 在 $\odot DEF$ 上运动时, $\triangle JPK$ 的外心始终在一条过 P 点的定直线上. 根据引理 5, H 点在一条过 A,P,B,C 的二次曲线上.

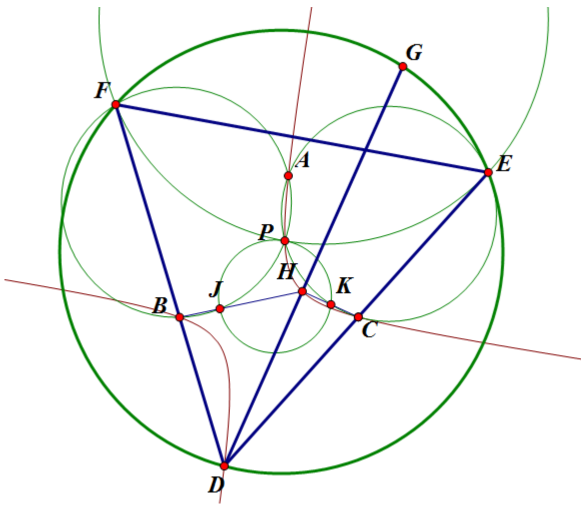

图 10

因此, 我们只需证明如下的命题:

若 A, B, C, D 是平面上的定点. PB 与 $\odot ABD$ 再次交于点 J, PC 与 $\odot ACD$ 再次交于点 K. 设 $\triangle DJK$ 的外心为 $f(P)$ 则当 P 在一条过 A, B, C, D 的定二次曲线 γ 上时, $f(P)$ 在一条过 D 的定直线上.

当 $P = D$ 时, $f(P) = D$. 考虑 $Xf(P)$, 事实上 $\angle(Xf(P), BP) = 90^\circ - \angle BAD$ 为定值 θ. 注意到同时有 $\angle(XY, AB) = \theta$. 对于 $Yf(P)$ 同理. 既然如此, 考虑 γ 上另一点 Q, 有

$$\begin{aligned}[Xf(P), Xf(Q); XY, XD] &= [BP, BQ; BA, BD] \\ &= [CP, CQ; CA, CD] \\ &= [Yf(P), Yf(Q); YX, YD].\end{aligned}$$

因此, P, Q, D 三点共线. $\square$

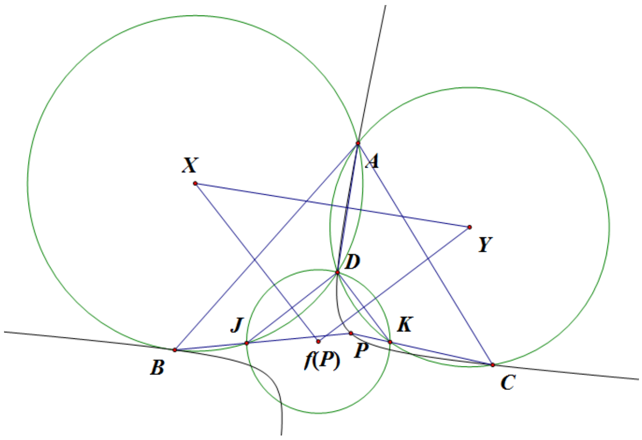

图 11

参考文献

[1] 纯几何吧 `http://tieba.baidu.com/p/5546393356`

[2] 纯几何吧 `http://tieba.baidu.com/p/5745139088`