一类分式不等式的探究

罗振华

(上海四季教育, 200070)

在 2019 年 1 月举行的中国数学奥林匹克协作体学校联考中, 本人提供了如下的一道不等式问题:

问题 1 给定正整数 $n>1$, 正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1}ka_{i+k-1}+\frac{1}{2}n(n-1)}}\le\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

这里下标按模 n 意义下理解.

无独有偶, 2018 年 Baltic Way 数学竞赛中也有一道类似的不等式问题:

问题 2 已知 $a,b,c,d\in\mathbb{R}^{+},abcd=1$. 求证:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}}\le 1.$$

事实上, 这两个不等式都来源于下述已知的问题.

问题 3 给定自然数 $n>1$, 正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx_{i+k-1}+\frac{1}{2}n(n-1)}\le\frac{1}{n-1}.$$

这里下标按模 n 意义下理解.

下面给出问题 3 的证明, 并作一些延伸讨论.

证明 首先我们需要如下引理.

引理 给定自然数 $n>1$, 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}}=1,$$

这里下标按模 n 意义下理解.

修订日期: 2019-02-24.

引理证明 由于 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 故存在实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 使得

$$a_i=\frac{b_{i+1}}{b_i}\ (i=1,\cdots,n).$$

从而

$$a_i\cdots a_{i+k-1}=\frac{b_{i+k}}{b_i},$$

则

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}}=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{b_{i+k}}{b_i}}=\frac{b_i}{b_1+\cdots+b_n}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{b_1+\cdots+b_n}=1.$$

引理获证.

回到原题. 由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}kx_{i+k-1}+\frac{1}{2}n(n-1)=&\sum_{k=1}^{n-1}kx_{i+k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\\=&\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k}x_{n-1+i-j}+n-1-k\right)+n-1\\\geq&\sum_{k=1}^{n}(n-1)\prod_{j=1}^{k}x_{n-1+i-j}^{\frac{1}{n-1}}+n-1\\=&(n-1)\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k}x_{n-1+i-j}^{\frac{1}{n-1}}\right).\end{aligned}$$

注意到 $x_1^{\frac{1}{n-1}}x_2^{\frac{1}{n-1}}\cdots x_n^{\frac{1}{n-1}}=1$, 由引理可知

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{j=1}^{k}x_{n-1+i-j}^{\frac{1}{n-1}}}=1,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx_{i+k-1}+\frac{1}{2}n(n-1)}\leq\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{j=1}^{k}x_{n-1+i-j}^{\frac{1}{n-1}}}=\frac{1}{n-1}.$$

□

值得注意的是, 上述证明中所用的引理也可以用来解决一些其它不等式问题, 例如 2004 年俄罗斯数学奥林匹克九年级第四题:

问题 4 给定自然数 $n>3$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个正实数, 且它们的乘积为 1.

求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i+x_ix_{i+1}} > 1.$$

在知道引理的情况下, 这个不等式是平凡的.

最后指出问题 3 与问题 1,2 之间的联系.

在问题 3 不等式的左边使用柯西不等式放缩就可以得到问题 1.

在问题 3 中取 $n=4$, 则有

$$\sum \frac{1}{a+2b+3c+6} \leq \frac{1}{3},$$

再对问题 2 不等式左边使用柯西不等式, 只需证

$$\sum \frac{1}{a+2b+3c+10} \leq \frac{1}{4},$$

利用局部不等式

$$\frac{16^2}{a+2b+3c+10} \leq \frac{12^2}{a+2b+3c+6} + \frac{4^2}{4},$$

就可以很快得出结论.

致谢 感谢上海大学冷岗松教授仔细审阅了本文并提出的宝贵修改意见.