2019 日本数学奥林匹克决赛

谷肇兴[1] 叶奇[2] 孙孟越[2] 刘明扬[3]
(1. 哈尔滨市第三中学, 150001; 2. 清华大学; 100084; 3. 华南师范大学附属中学, 510630)

I. 试 题

2019 年 2 月 11 日　　考试时间 4 小时

1. 求正整数组 (a,b,c) 满足 $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

2. 设 $n\geq 3$ 是奇数. 用 $n\times n$ 的方格纸做游戏, 我们在这 n^2 个方格中填数字. 每一步, 选择一个空的小方格, 在其中填入 $1,2,\ldots,n^2$ 中的某个数字, 并且保证表格中的数字不重复. 如果填入后, 这个格子所在行 (或者所在列) 填写数字之和是 n 的倍数, 则记 1 分 (如果所在行数字之和、所在列数字之和都是 n 的倍数则记 2 分). 试问, 游戏结束 (即 n^2 步之后), 得分最大值是多少?

3. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 满足对任意正实数 x,y, 有
$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}+1\right)=f\left(x+\frac{y}{x}+1\right)-f(x).$$

4. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, ω 是其内切圆. M 是 BC 中点. 经过点 A 且与 BC 垂直的直线, 与经过点 M 且与 AI 垂直的直线, 相交于点 K. 求证: 以线段 AK 为直径的圆与 ω 相切.

5. 设 S 是正整数集合, 若 S 满足: 对任意互不相同的 $x,y,z\in S$, 有 x,y,z 中至少一个是 $x+y+z$ 的因子, 则称 S 是美妙的集合. 证明: 满足以下条件的正整数 N 是存在的, 并求其最小值. 对任意美妙的集合 S, 存在不小于 2 的整数 n_S, 使得 S 中不被 n_S 整除的元素至多有 N 个.

修订日期: 2019-03-01.

Ⅱ. 解答与评注

题 1. 求正整数组 (a,b,c) 满足 $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

解 (孙孟越) 先考虑下述引理.

引理 对正整数 $x\neq y$, 有 $|x^2-y^2|\geq 2x-1$.

事实上，由

$$|x^2-y^2|\geq \min\{x^2-(x-1)^2,(x+1)^2-x^2\}=2x-1,$$

引理即得证.

回到原题. 显然 $b^2-c^2\neq 0$, 利用两次引理, 我们有

$$b+3=(b^2-c^2)^2-a^2\geq 2|b^2-c^2|-1\geq 2(2b-1)-1=4b-3.$$

故有 $b\leq 2$.

若 $b=1$, 则 $a^2+4=(c^2-1)^2$ 是平方数, 这表明 $a=0$, 这不可能.

若 $b=2$, 则 $a^2+5=(c^2-4)^2$ 是平方数, 这表明 $a=2,c^2=1$ 或 7. 得 $(a,b,c)=(2,2,1)$, 此即全体解. □

评析 这个题本质上就是说两个平方数之间距离不会太小, 用数学语言刻画即为我们的引理. 是个容易的问题.

题 2. 设 $n\geq 3$ 是奇数. 用 $n\times n$ 的方格纸做游戏, 我们在这 n^2 个方格中填数字. 每一步, 选择一个空的小方格, 在其中填入 $1,2,\dots,n^2$ 中的某个数字, 并且保证表格中的数字不重复. 如果填入后, 这个格子所在行 (或者所在列) 填写数字之和是 n 的倍数, 则记 1 分 (如果所在行数字之和、所在列数字之和都是 n 的倍数则记 2 分). 试问, 游戏结束 (即 n^2 步之后), 得分最大值是多少?

解 (孙孟越) 我们把得分分成两类: 即所在行之和是 n 的倍数则称为行得分, 所在列之和是 n 的倍数则称为列得分.

我们证明: 行得分至多为 $\frac{n(n+1)}{2}$, 同理, 列得分至多为 $\frac{n(n+1)}{2}$. 从而证明得分至多为 $n(n+1)$.

我们来考虑行得分. 再分为两类: 由 n 的倍数贡献的行得分, 非 n 的倍数贡献的行得分. 前者至多贡献 n 分, 下面证明后者至多贡献 $\frac{n(n-1)}{2}$ 分.

设第一行填入非 n 的倍数依次为 $x_1,x_2,\dots,x_k$, 我们只要注意到填入 $x_i,x_{i+1}(1\leq i\leq k-1)$ 时行和模 n 余数不同, 即知 x_i,x_{i+1} 至多共贡献 1 分行得

分. 再注意 x_1 必然不会贡献行得分. 依此可知, 第一行中, 非 n 的倍数贡献的行得分至多为 $\frac{k}{2}$ 分.

对每一行作类似分析知, 非 n 的倍数贡献的分数至多为 $\frac{n(n-1)}{2}$. 结合 n 的倍数至多贡献 n 分, 知行得分至多为 $\frac{n(n+1)}{2}$.

同理, 列得分至多 $\frac{n(n+1)}{2}$, 故总得分至多 $n(n+1)$.

另一方面, 我们给出一个得分为 $n(n+1)$ 的构造. 把方格表第 i 行 j 列的方格标记为 $(i,j)(1 \le i,j \le n)$. 我们把这些格子中的

$$X_k = \{(i,j) | 1 \le i,j \le n, i+j \equiv k \pmod n\}$$

称为第 k 条对角线. 则每条对角线上恰有 n 个格子.

我们先把模 n 余 1 的 n 个数都填入第 1 条对角线中, 此时每步得 0 分. 再把模 n 余 $n-1$ 的 n 个数都填入第 $n-1$ 条对角线中, 此时的每步得 2 分. 共得 $2n$ 分.

以此类推, 分别对 $2 \le t \le \frac{n-1}{2}$, 我们先把模 n 余 t 的 n 个数都填入第 t 条对角线中, 此时每步得 0 分. 再把模 n 余 $n-t$ 的 n 个数都填入第 $n-t$ 条对角线中, 此时的每步得 2 分. 这一阶段中, 共得 $2n$ 分.

最后, 将模 n 余 n 的 n 个数都放入第 n 条对角线中, 此时的每步得 2 分. 共得 $2n$ 分. 故总得分为

$$2n \cdot \frac{n+1}{2} = n(n+1).$$

此即最大值. □

评析 这个题想法比较朴素. 通过一些试探我们可以发现 n 的倍数是不那么重要的, 更为重要的是把不是 n 倍数的那些数安置好. 据此, 我们发现了行得分的估计, 并找到了构造. 算是一个联赛中等难度的组合题.

题 3. *求所有函数 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 满足对任意正实数 x, y, 有*

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}+1\right) = f\left(x+\frac{y}{x}+1\right) - f(x).$$

证明 (刘明扬) 令 $x = y$, 知 $f(x) + f(2) = f(x+2)$.

若存在 $a < b$, 使得 $f(a) = f(b)$, 分别令 $y = a, b$, 则

$$f(x+\frac{a}{x}+1) = f\left(\frac{f(a)}{f(x)}+1\right) + f(x) = f\left(\frac{f(b)}{f(x)}+1\right) + f(x) = f\left(x+\frac{b}{x}+1\right).$$

再令

$$x = \frac{b-a}{2},$$

则

$$\left(x+\frac{b}{x}+1\right)-\left(x+\frac{a}{x}+1\right)=2.$$

但 $f(2)>0$, 且

$$f\left(x+\frac{a}{x}+1\right)+f(2)=f\left(x+\frac{b}{x}+1\right),$$

矛盾! 故 f 为单射.

令 $x=2$, 则

$$f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(3+\frac{y}{2}\right)-f(2)=f\left(1+\frac{y}{2}\right),$$

故

$$\frac{f(y)}{f(2)}+1=1+\frac{y}{2},$$

所以

$$f(y)=\frac{f(2)}{2}\cdot y.$$

令

$$\frac{f(2)}{2}=c>0,$$

则

$$f(y)=cy.$$

经验算, $f(x)=cx$ $(c>0)$ 满足要求. 所以

$$f(x)=cx\ (c>0).$$

□

评析 我们想, f 具有一定的可加性, 我们希望找到一个形式较简单的结论. 证明单射是本质的一步, 并且需要一定的技巧性. 之后的步骤也随着单射的证出而变得显然了.

题 4. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, ω 是其内切圆. M 是 BC 中点. 经过点 A 且与 BC 垂直的直线, 与经过点 M 且与 AI 垂直的直线, 相交于点 K. 求证: 以线段 AK 为直径的圆与 ω 相切.

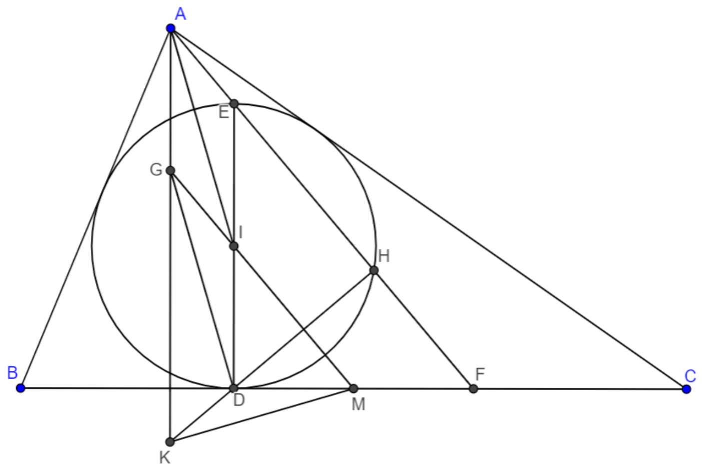
证明 (孙孟越) 若 $AB=AC$, 由对称性知结论显然成立, 下设 $AB\neq AC$.

设 E 是 D 关于 I 的对称点, 设 AE 与 BC 交于点 F. 我们不加证明地引用如下熟知结论:

结论 M 是线段 DF 的中点.

首先, 我们证明 $KD \perp AF$. 为此, 取 G 为直线 MI 与直线 AK 的交点. 则由于 $MI \parallel EF, AK \parallel DE$ 知, $AGIE$ 是平行四边形. 由于 I 是 DE 中点, 故 $AGDI$ 也是平行四边形. 我们得到 $GD \parallel AI \Rightarrow GD \perp MK$. 结合 $MD \perp GK$, 我们得到 D 是 $\triangle MGK$ 的垂心, 故 $KD \perp MG$. 由于 $MG \parallel AF$, 故有 $KD \perp AF$.

设 H 是直线 KD 与直线 AD 的交点, 则有 $\triangle HDE$ 与 $\triangle HAK$ (以 H 为中心) 位似, 故两者的外接圆相切于点 H. 最后, 注意 $KD \perp AF$, 这表明 $\triangle HDE$ 与 $\triangle HAK$ 的外接圆即为 ω 和以 AK 为直径的圆. 故结论成立. □



评析 这个题目中第一步的结论是需要同学们熟悉的. 这个结论的证明一般是采用位似: 过 E 作 $XY \parallel BC$, 使得 X 在 B 上, Y 在 C 上. 则 $\triangle AXY$ 与 $\triangle ABC$ 位似. 而 E 是 $\triangle AXY$ 的旁切圆切点, 故其位似对应点 F 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆切点.

在熟悉这个结构之后, 条件中作的两个垂直是很不自然的, 我直觉告诉我实际上应该是人工创造出了一个垂心, 便找到了上述解答.

题 5. 设 S 是正整数集合, 若 S 满足: 对任意互不相同的 $x, y, z \in S$, 有 x, y, z 中至少一个是 $x+y+z$ 的因子, 则称 S 是美妙的集合. 证明: 满足以下条件的正整数 N 是存在的, 并求其最小值. 对任意美妙的集合 S, 存在不小于 2 的整数 n_S, 使得 S 中不被 n_S 整除的元素至多有 N 个.

证明 (谷肇兴, 叶奇) 取最小的 N 是 6.

首先说明 $N \geq 6$. 取集合 $\{1, 2, a, b, c, d, e\}$ 满足 a, b, c, d, e 为 5 个不为 1 的正奇数, 互不相同且 $(a, b) = 1$,

$$\begin{cases} c \equiv b \pmod{a} \\ c \equiv -a \pmod{b} \end{cases},$$

$$\begin{cases} d \equiv -b \pmod a \\ d \equiv -a \pmod b \\ d \equiv -b \pmod c \end{cases}, \qquad \begin{cases} e \equiv -b \pmod a \\ e \equiv a \pmod b \\ e \equiv b \pmod c \\ e \equiv -a \pmod d \end{cases}.$$

由中国剩余定理这样的 c 存在且和 a, b 互素.

同样的, 这样的 d, e 存在且 a, b, c, d, e 两两互素. 这时

$$a \mid a+b+d,\quad b \mid a+b+c,\quad a \mid a+b+e,\quad a \mid a+c+d,\quad a \mid a+c+e,$$

$$b \mid b+d+e,\quad b \mid b+c+e,\quad c \mid b+c+d,\quad c \mid c+d+e,\quad d \mid a+d+e.$$

故当 $x, y \in \{1, a, b, c, d, e\}$ 时, $2|2+x+y$; 当 $m, n \in \{2, a, b, c, d, e\}$ 时, $1|1+m+n$.

所以集合 $\{1, 2, a, b, c, d, e\}$ 为美妙的, 而 $1, 2, a, b, c, d, e$ 两两互素, 因此对任意 $x \geq 2, x \in \mathbb{N}^*$, x 至多整除 $\{1, 2, a, b, c, d, e\}$ 中 1 个数. 于是任取 n_s 都有至少 6 个数在 $\{1, 2, a, b, c, d, e\}$ 中且它们均不被 n_s 整除. 故 $N \geq 6$.

下面我们证明 $N = 6$ 成立. 若 S 中至多有 7 个元素, 取 n_s 为它的某个不等于 1 元素, 则 $N \leq 6$. 下设 S 中含有至少 8 个元素, 且设它最小的 8 个元素从小到大排列依次为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. 我们接下来证明这 8 个元素不能两两互素.

我们采用反证法证明. 若这 8 个数两两互素, 则其中至多有 1 个偶数, 1 个 1. 所以 $x_1, x_2, \cdots, x_8$ 中存在 6 个两两互素且大于 1 的正奇数. 从小到大依次设为 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, 满足 $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6$.

若 $a \mid a+b+c$, 即 $a \mid b+c$. 我们称三元组 (a, b, c) 被 a 解决了.

接下来, 我们证明 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ 分别至多可解决 $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ 三元子集组中的 6,6,4,2,1,0 个 (当 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ 两两互素时).

对任意 $i_1, i_2 \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$, 若 $y_6 \mid y_{i_1} + y_{i_2}$, 因为 $y_{i_1} < y_6$, $y_{i_2} < y_6$, 则 $y_{i_1} + y_{i_2} < 2y_6$. 故

$$y_{i_1} + y_{i_2} = y_6.$$

而 $y_{i_1} + y_{i_2}$ 为偶数, y_6 为奇数,矛盾! 因此 y_6 不解决任何 $\{y_1, y_2, \cdots, y_6\}$ 的三元子集组.

同理可证: 对任意 $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$, $y_{i_3} \nmid y_{i_1} + y_{i_2}$.

接下来考虑 y_5. 若 $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, 则 $y_5 \nmid y_{i_1} + y_{i_2}$. 所以若 $1 \leq a < b \leq 6$ 且 $a \neq 5$, $b \neq 5$, $y_5 \mid y_1 + y_b$, 则有 $b = 6$.

若存在 $1 \le a_1 < a_2 \le 4$, 令 $y_5 \mid y_6 + y_{a_1}$, $y_5 \mid y_6 + y_{a_2}$, 则有

$$y_5 \mid (y_6 + y_{a_2}) - (y_6 + y_{a_1}),$$

即 $y_5 \mid y_{a_2} - y_{a_1}$. 而

$$0 < y_{a_2} - y_{a_1} < y_{a_2} \le y_5,$$

所以矛盾! 故 y_5 至多解决了一个三元组.

接下来考虑 y_4. 若 $1 \le i_1 < i_2 \le 3$, 则 $y_4 \nmid y_{i_1} + y_{i_2}$.

若 $y_4 \mid y_5 + y_6$, 则不存在 $i_1, i_2 \in \mathbb{N}^*$, 令 $1 \le i_1, i_2 \le 3$, $y_4 \mid y_5 + y_{i_1}$, $y_4 \mid y_6 + y_{i_2}$. 这是因为若 $i_1 \ne i_2$, 则

$$y_4 \mid (y_5 + y_{i_1}) + (y_6 + y_{i_2}) - (y_5 + y_6),$$

即 $y_4 \mid y_{i_1} + y_{i_2}$. 而 $i_1 \ne i_2$, $1 \le i_1, i_2 \le 3$, 矛盾! 若 $i_1 = i_2$, 则

$$y_4 \mid y_6 - y_5,$$

从而 $y_4 \mid 2y_6$. 而 y_4 为奇数, $y_4 \mid y_6$, 与 y_4, y_6 互素矛盾!

类比 y_5 可证明 y_4 也可至多解决 1 个含 y_5 和 y_i $(i \le 3, i \in \mathbb{N}^*)$ 的三元组. y_4 也可至多解决 1 个含 y_6 和 y_j $(j \le 3, j \in \mathbb{N}^*)$. 又因为 $y_4 \mid y_5 + y_6$ 时两者不同时成立, 所以 y_4 至多解决 2 个 3 元组.

接下来考虑 y_3. 首先 $y_3 \nmid y_1 + y_2$, 其次 $y_3 \mid y_1 + y_i$ 和 $y_3 \mid y_2 + y_i$ 不同时成立 (对 $i \ge 4$), 再其次 $y_3 \mid y_4 + y_5$, $y_3 \mid y_4 + y_6$, $y_3 \mid y_5 + y_6$ 时,

$$y_3 \mid 2(y_4 + y_5 + y_6).$$

因为 y_3 为奇数, 所以 $y_3 \mid y_4 + y_5 + y_6$. 从而 $y_3 \mid y_6$, 与 y_3, y_6 互素矛盾! 故

$$y_3 \mid y_4 + y_5,\ y_3 \mid y_4 + y_6,\ y_3 \mid y_5 + y_6$$

不同时成立. 若有两个成立, 设

$$y_3 \mid y_{i_1} + y_{i_2},\ y_3 \mid y_{i_1} + y_{i_3},\ y_3 \nmid y_{i_2} + y_{i_3},$$

(i_1, i_2, i_3) 为 $(4, 5, 6)$ 的某个排列, 而此时若 $y_3 \mid y_{i_1} + y_{j_1}$, $j_1 = 1$或 $j_1 = 2$, 则

$$y_3 \nmid y_{i_2} + y_1,\quad y_3 \nmid y_{i_2} + y_2,$$
$$y_3 \nmid y_{i_3} + y_1,\quad y_3 \nmid y_{i_3} + y_2.$$

否则 $y_3 \mid 2y_1$ 或 $y_3 \mid y_1 + y_2$, 均矛盾! 所以

$$y_3 \mid y_{i_1} + y_{i_2},\ y_3 \mid y_{i_1} + y_{i_3},\ y_3 \nmid y_{i_2} + y_{i_3}$$

时, 由于

$$y_3 \mid y_1 + y_{i_2},\ y_3 \mid y_2 + y_{i_2}$$

不同时成立, 所以 y_3 至多可解决 2+2=4 组三元组.

若 $y_3 \mid y_4+y_5$, $y_3 \mid y_4+y_6, y_3 \mid y_5+y_6$ 中只有一个成立或均不成立, 则 y_3 至多可解决 $1+3=4$ 组三元组. 所以 y_3 至多可解决 4 组三元组.

接下来考虑 y_2. 将 y_1, y_3, y_4, y_5, y_6 化成五个点 A_1, A_3, A_4, A_5, A_6.

若 y_2 解决了三元组 (y_2, y_i, y_j), 则在 A_i 和 A_j 之间连一条线段.

若 y_2 解决了至少 7 个三元组, 则在 A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 之间至少有 7 个线段. 每条线段化成实线, 若两点之间原先未连线, 则现在连一条虚线. 所以每条实线或虚线恰处在 3 个三角形中. 图中共有 10 个三角形. 设每个三角形内实线条数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$, 因此

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10} \geq 7\times 3 > 2\times 10.$$

由抽屉原理 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 中至少有 1 个为 3. 设 $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ 有 3 条实线, 则

$$y_2 \mid y_{i_1}+y_{i_2},\ y_2 \mid y_{i_1}+y_{i_3},\ y_2 \mid y_{i_2}+y_{i_3},$$

从而 $y_2 \mid 2(y_{i_1}+y_{i_2}+y_{i_3})$. 因为 y_2 为奇数, 所以 $y_2 \mid y_{i_1}+y_{i_2}+y_{i_3}$, 即 $y_2 \mid y_{i_1}$, 与 $(y_2, y_{i_1})=1$ 矛盾! 故 y_2 至多解决 6 个三元组.

同理可证 y_1 至多可解决 6 个三元组.

所以 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ 一共至多可解决 6+6+4+2+1+0=19 个三元组. 而 $\{y_1, y_2, \cdots, y_6\}$ 共有 $\mathrm{C}_6^3=20$ 个三元组, 所以有一个三元组 $\{y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}\}$.

令 $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$,

$$y_{i_1} \nmid y_{i_1}+y_{i_2}+y_{i_3},\quad y_{i_2} \nmid y_{i_1}+y_{i_2}+y_{i_3},\quad y_{i_3} \nmid y_{i_1}+y_{i_2}+y_{i_3},$$

这与 S 是美妙的集合矛盾!

因此 $y_1, y_2, \cdots, y_6$ 不可能两两互素, 从而 $x_1, x_2, \cdots, x_8$ 不可能两两互素.

设 $(x_i, x_j) \neq 1$, $1 \leq i < j \leq 8$, 则对 S 中任意元素 r, r 不在 $\{x_1, \cdots, x_8\}$ 中, $r > x_i$, $r > x_j$, 要么有 $r \mid x_i+x_j$, 此时结合 $x_i+x_j < 2r$ 知 $x_i+x_j=r$. 要么有 $x_j \mid x+r_i$, 要么有 $x_i \mid x_j+r$. 无论哪种情况, 都有

$$(x_i, x_j) \mid r.$$

取 $n_s=(x_i, x_j)$, 因此有 6 个数不被 n_s 整除.

所以 $N=6$ 成立, 结论得证. □

评析 这道题思路来自发现: 如果 $a<b<c$ 满足 $a+b+c$ 被 a, b, c 中任一个整除, 则 $\gcd(a, b) \mid c$. 于是, 这道题可以转化为求解美妙的集合中最多可以有几个数两两互素. 除去 1,2 外, 6 个正奇数不能两两互素的证明难度相对较小但

讨论比较繁琐 (这一部分由谷肇兴解决). 题目难点大部分在寻找 5 个奇数两两互素的构造, 想到中国剩余定理比较自然但需要一段时间尝试 (这一部分由叶奇解决).

日本的选拔制度中是没有集训队测试的, 也就是说这场考试是直接关系到其国家队选手选拔的. 为此, 这场考试的结构中, 前四个题都相当于我国的联赛难度, 而最后一个题则接近集训队难度, 目的就是筛选出国家队队员.