一道新星征解题的简证

黄嘉俊

(上海市上海中学, 200231)

新星问题征解第 28 期中的一道不等式题难度高且优美, 题目如下:

问题 已知 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n$, 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < e^{\frac{n}{2}}.$$

(天津实验中学 解尧平 供题)

本短文给出上述问题的一个简洁的证明.

证明 我们用归纳法证明更强的命题:

若$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq A, \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leq A$, 则有

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \left(\frac{A}{n}\right)^n e^{\frac{n}{e}}. \tag{$*$}$$

我们对 n 归纳.

当 $n = 1$ 时, $(*)$ 成立.

设 $(*)$ 对小于 n 的情形成立, 下证 n 时的情形.

不妨设 $x_n > y_n$, 我们分两种情况.

1) 若 $x_i > y_i, \forall 1 \leq i \leq n$, 结合均值不等式知

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n \leq \left(\frac{A}{n}\right)^n,$$

得证.

2) 若存在 $1 \leq u \leq n-1$, 使得

$$x_n > y_n, x_{n-1} > y_{n-1}, \cdots, x_{u+1} > y_{u+1}, \text{但 } x_u < y_u.$$

修订日期: **2019-03-03.**

此时有

$$\sum_{i=1}^{u}(x_i - x_u) \le A - ux_u, \quad \sum_{i=1}^{u}(y_i - x_u) \le A - ux_u,$$

且 $x_i \ge x_u, y_i \ge y_u, \forall 1 \le i \le u$. 故由归纳假设知,

$$\prod_{i=1}^{u}|x_i - y_i| \le \left(\frac{A - ux_u}{u}\right)^u e^{\frac{u}{e}}.$$

另一方面,

$$\prod_{i=u+1}^{n}|x_i - y_i| = \prod_{i=u+1}^{n}(x_i - y_i) \le \prod_{i=u+1}^{n} x_i \le k^{n-u},$$

其中 $k = \frac{\sum_{i=u+1}^{n} x_i}{n-u}$. 故要证 $(*)$, 只需证

$$\left(\frac{A - ux_u}{u}\right)^u e^{\frac{u}{e}} k^{n-u} \le \left(\frac{A}{n}\right)^n e^{\frac{n}{e}}.$$

由 $x_i(1 \le i \le n)$ 的单调性知, $x_u \ge k, \frac{A}{n} \ge k$, 故只需证

$$\left(\frac{A - uk}{u}\right)^u k^{n-u} \le \left(\frac{A}{n}\right)^n e^{\frac{n-u}{e}}. \qquad (**)$$

记 $f(x) = x^{n-u}\left(\frac{A-ux}{u}\right)^u$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n-u)x^{n-u-1}\left(\frac{A - ux}{u}\right)^u - ux^{n-u}\left(\frac{A - ux}{u}\right)^{u-1} \\ &= x^{n-u-1}\left(\frac{A - ux}{u}\right)^{u-1}\left((n-u)\frac{A - ux}{u} - ux\right) \\ &= x^{n-u-1}\left(\frac{A - ux}{u}\right)^{u-1}\left((n-u)\frac{A}{u} - nx\right), \end{aligned}$$

故 f 在 $[0, \frac{(n-u)A}{nu}]$ 单调递增, 在 $[\frac{(n-u)A}{nu}, \frac{A}{u}]$ 上单调递减.

对 u 分两种情况.

i) 若 $n \le 2u$, 则 $\frac{(n-u)A}{nu} \le \frac{A}{n}$, 从而

$$f(k) \le f\left(\frac{(n-u)A}{nu}\right) = \left(\frac{A}{n}\right)^u \left(\frac{(n-u)A}{nu}\right)^{n-u} \le \left(\frac{A}{n}\right)^u \left(\frac{A}{n}\right)^{n-u} = \left(\frac{A}{n}\right)^n,$$

注意到 $e^{\frac{n-u}{e}} > 1$, 从而 $(**)$ 成立.

ii) 若 $n > 2u$, 则 $\frac{A}{n} < \frac{(n-u)A}{nu}$, 从而

$$f(k) \le f\left(\frac{A}{n}\right) = \left(\frac{A}{n}\right)^{n-u}\left(\frac{(n-u)A}{un}\right)^u = \left(\frac{A}{n}\right)^n \left(\frac{n-u}{u}\right)^u. \qquad (1)$$

对 $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ 求导分析单调性便知, $x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}}, \forall x > 0$, 取 $t = \frac{n-u}{u}$ 便得

$$\left(\frac{n-u}{u}\right)^{\left(\frac{u}{n-u}\right)} \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \left(\frac{n-u}{u}\right)^u \le e^{\frac{n-u}{e}},$$

结合 (1) 知, 此时 $(**)$ 成立.

结合 1), 2) 知 $(*)$ 成立, 于是命题得证. □

致谢 作者感谢王广廷老师的指导!