一个内心关联巧合点难题

严君啸

(浙江省镇海中学, 315000)

通过几何画板,笔者发现了这样一个问题:

问题 如图 1 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, I 为内心, H_1 为以三条角平分线与对边交点为顶点的三角形的垂心, H_2 为内切圆切点三角形的垂心, AH_2 与外接圆交于另一点 D_0, H_2 关于 BC 边对称点为 H_2', $H_2'D_0$ 与外接圆交于另一点 E_0, 则 $AE_0 \perp IH_1$.

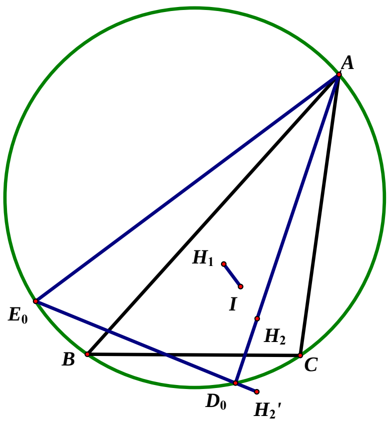

图 1

然而, 这个问题的证明非常困难. 笔者根据自己的思考并结合相关资料, 在本文中给出此题的几何证法.

为方便描述, 先约定下列字母标记的几何意义, 在后续行文中不再反复说明, 请读者详察.

如图 2 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, I, O 分别为内心, 外心, I_a, I_b, I_c 分别为 I 关于 BC, CA, AB 的对称点, X, Y, Z 分别为 A, B, C 引出的角平分线与对边交点, I_1, I_2, I_3 分别为 $A-$旁心, $B-$旁心, $C-$旁心, H_a, H_b, H_c 分别为 A, B, C 在

收稿日期: 2019-02-14.

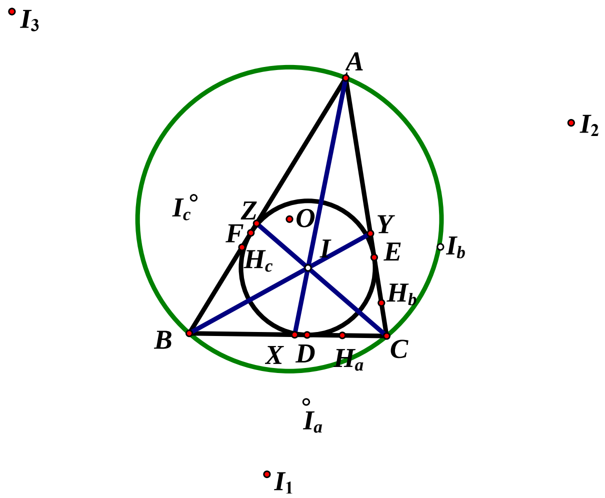

图 2

对边上的射影, D, E, F 分别为内切圆与 BC, CA, AB 的切点, 原题中出现的字母意义与原题相同.

文中其它的字母标记以文中当处说明为准.

I. 预备知识

引理 1.1[1] AI_a, BI_b, CI_c 交于一点 P (P 在后续行文中的意义不再改变).

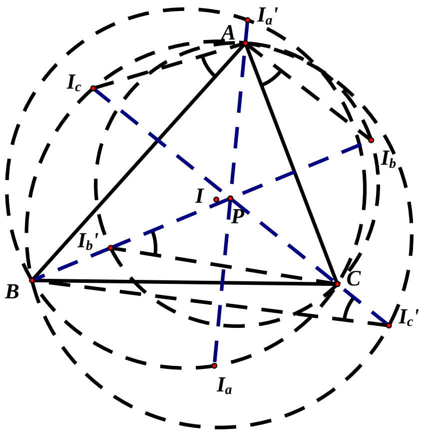

图 3

证明 如图 3 所示, 设 AI_a 与 $\odot(BI_aC)$ 交于另一点 I_a'. 类似地定义 I_b', I_c'. 则

$$\angle CI_b'I_b = \angle CAI_b = \angle CAI = \angle BAI = \angle BAI_c = \angle BI_c'I_c,$$

故 B, I_b', C, I_c' 四点共圆.

类似地, A, I_a', B, I_b' 四点共圆, C, I_c', A, I_a' 四点共圆. 则 AI_a, BI_b, CI_c 共点于 $\odot(BI_b'CI_c')$, $\odot(AI_a'BI_b')$, $\odot(CI_c'AI_a')$ 的根心 P. □

引理 1.2[1] $\triangle XYZ$ 和 $\triangle ABC$ 透视. 其透视轴称为 $\triangle ABC$ 的反垂足轴.

引理 1.3[1] 设 $R = H_bH_c \cap BC, S = H_cH_a \cap CA, T = H_aH_b \cap AB$. 则 R, S, T 三点共线. 此线称为 $\triangle ABC$ 的垂足轴,其是 $\triangle ABC$ 九点圆与外接圆的根轴,而垂直于 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

引理 1.4[2] 三个共透视中心的三角形两两透视轴三线共点.

引理 1.5[3] 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 满足: A 关于 B_1C_1 的垂线, B 关于 C_1A_1 的垂线, C 关于 A_1B_1 的垂线三线共点, 则称 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 正交, 所共点 Q 称为 $\triangle ABC$ 关于 $\triangle A_1B_1C_1$ 的正交中心. 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 正交, 则 A_1 关于 BC 的垂线, B_1 关于 CA 的垂线, C_1 关于 AB 的垂线三线亦共点, 所共点 Q_1 即为 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 $\triangle ABC$ 的正交中心.

引理 1.6[3] **(P. Sondat 定理)** 两个透视且正交的 $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, 透视轴为 d, 透视中心为 T, $\triangle ABC$ 关于 $\triangle A_1B_1C_1$ 的正交中心为 Q, $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 $\triangle ABC$ 的正交中心为 Q_1, 则 T, Q, Q_1 在同一条垂直于 d 的直线上.

引理 1.7[4] $\triangle IBC$, $\triangle ICA$, $\triangle IAB$ 和 $\triangle ABC$ 的四条欧拉线共点. 该点称为 $\triangle ABC$ 的Schiffler 点.

引理 1.8[5] 设 O_1, O_2, O_3 分别为 $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ 的外心,则 AO_1, BO_2, CO_3 共点 K. 该点称为 $\triangle ABC$ 的 Kosnita 点, 其是 $\triangle ABC$ 九点圆心的等角共轭点.

II. 证明 IH_1 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线

引理 2.1 I 在 PH_1 上.

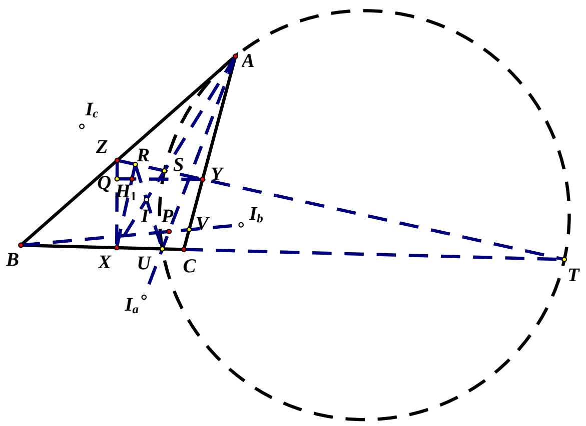

图 4

证明 如图 4 所示, 设

$$Q = YH_1 \cap ZX, R = XH_1 \cap YZ, S = AX \cap YZ,$$

$$T = YZ \cap BC, U = AI_a \cap BC, V = BI_b \cap CA.$$

由于 UA, US, UI, UX 构成调和线束, $\angle IUX = \angle I_aUX$, 故 $US \perp UX$, 即 $US \perp BC$. 显然由调和点列, T 为 $\angle BAC$ 外角平分线与 BC 交点, 故 $AT \perp AI$. 故 A, S, U, T 四点共圆. 又注意到 A, R, X, T 四点共圆, R, S, U, X 四点共圆, 故

$$\angle IUS = \angle AUS = \angle ATS = \angle AXR = \angle RUS.$$

因此 I 在 UR 上. 对 $\triangle ABU$ 和 $\triangle XYR$ 运用 Desargue 定理, 有 XR 与 AP 的交点在 $\triangle ABC$ 的反垂足轴上. 同理, YQ 与 BP 的交点也在 $\triangle ABC$ 的反垂足轴上. 故对 $\triangle ABP$ 和 $\triangle XYH_1$ 运用 Desargue 定理的逆定理, I 在 PH_1 上. □

引理 2.2 设 $\{J\} = H_cH_a \cap CA$, $\{K\} = H_aH_b \cap AB$, T 是 $\angle H_aJC$ 和 $\angle H_aKB$ 两条内角平分线交点,则 A, T, I_a 三点共线.

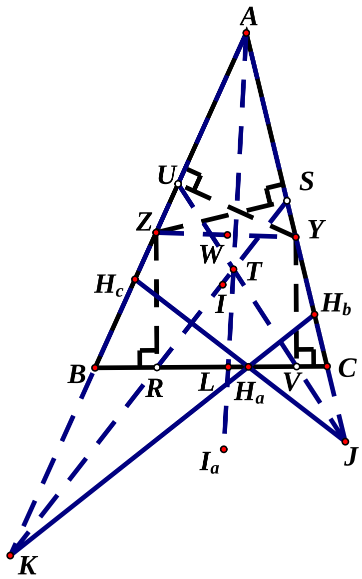

图 5

证明 如图 5 所示,设 $L = AI_a \cap BC$, U, V 分别为 Y 在 AB, BC 上的射影, R, S 分别为 Z 在 BC, CA 上的射影. 由于

$$\frac{AU}{H_cU} = \frac{AY}{CY} = \frac{AB}{CB} = \frac{AH_a}{CH_c} = \frac{AJ}{H_cJ},$$

故 JU 是 $\angle H_aJC$ 的内角平分线, 故 J, T, U 共线. 同理, V 在 JT 上, R, S 在 KT 上. 设

$$T_1 = AI_a \cap UV, T_2 = AI_a \cap RS, W = AI \cap YZ,$$

对 $\triangle ABL$ 和截线 VT_1U 运用 Menelaus 定理, 注意到 $BV=BU$, 我们有

$$\frac{AT_1}{LT_1}=\frac{AU}{LV}. \tag{1}$$

同理,

$$\frac{AT_2}{LT_2}=\frac{AS}{LR}. \tag{2}$$

又由 LA, LI, LW, BC 构成调和线束且 BC 平分 $\angle ILI_a$, 可得 $WL\perp BC$. 故

$$\frac{LV}{LR}=\frac{WY}{WZ}=\frac{AY}{AZ}=\frac{AU}{AS},$$

结合 (1), (2) 可得, $T_1=T_2=T$. 故 A, T, I_a 三点共线. □

引理 2.3 IP 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

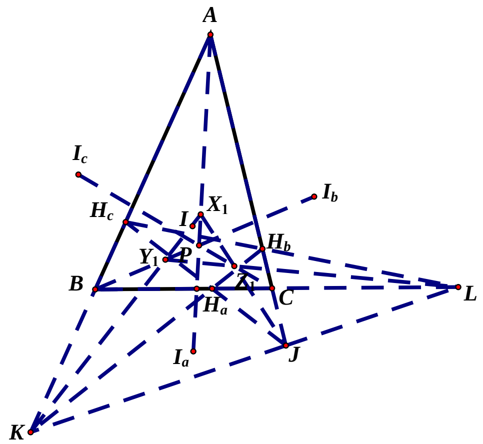

图 6

证明 如图 6 所示, 设

$$J=H_cH_a\cap CA, K=H_aH_b\cap AB, L=H_bH_c\cap BC,$$

X_1 是 $\angle H_aJC$ 和 $\angle H_aKB$ 两条内角平分线交点. 类似地定义 Y_1, Z_1.

由引理 2.2, X_1 在 AI_a 上, Y_1 在 BI_b 上, Z_1 在 CI_c 上. 故由引理 1.4, $\triangle ABC$, $\triangle I_aI_bI_c$, $\triangle X_1Y_1Z_1$ 两两透视轴三线共点. 导角易得 $AI\perp I_bI_c, AI\perp Y_1Z_1$. 故 $I_bI_c\parallel Y_1Z_1$. 同理,

$$I_cI_a\parallel Z_1X_1, I_aI_b\parallel X_1Y_1.$$

故 $\triangle I_aI_bI_c$ 与 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 位似, 其透视轴为无穷远线, 故 $\triangle ABC$ 与 $\triangle I_aI_bI_c$ 的透视轴 d 平行于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 的透视轴 KJL, 即 $\triangle ABC$ 的垂足轴. 由 P.Sondat 定理, d 垂直于 $\triangle ABC$, $\triangle I_aI_bI_c$ 的正交中心 I 与透视中心 P 的连线. 又由引理 1.3, IP 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线. □

由引理 2.1 和引理 2.3, IH_1 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

注 本部分证明根据 Telv Cohl (台湾) 在 AoPS 上的英文证明整理.

III. 引理 2.3 的另一种证明途径

为避免深奥的 P. Sondat 定理,笔者想到了另一种位似证明方法.

引理 3.1 $\triangle DEF$ 的 Kosnita 点 K_1 是 IP 的中点.

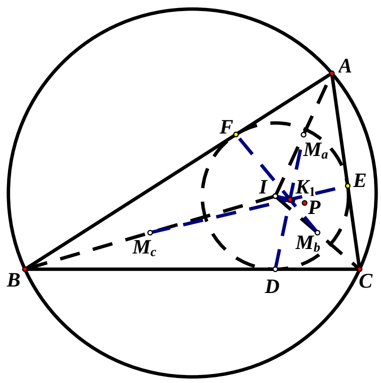

图 7

证明 如图 7 所示, 设 M_a, M_b, M_c 分别为 AI, BI, CI 的中点, 则 M_a, M_b, M_c 分别为 $\triangle IEF$, $\triangle IFD$, $\triangle IDE$ 的外心. 故 DM_a, EM_b, FM_c 三线共点 K_1.

而 $\triangle M_aM_bM_c$ 与 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 与 $\triangle I_aI_bI_c$ 分别关于 I 以 $1:2$ 的位似比位似, K_1 在此位似变换下的像即为 P. 故 K_1 是 IP 中点. □

引理 3.2 如图 8 所示,设 J_a, J_b, J_c 分别为 $\triangle IBC$, $\triangle ICA$, $\triangle IAB$ 的外心, 则 $\triangle ABC$ 的 Schiffler 点 S 是$\triangle J_aJ_bJ_c$ 的 Kosnita 点.

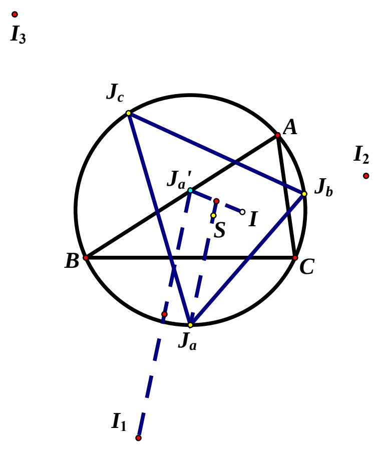

图 8

证明 设 J_a 关于 BC 的对称点为 J_a', 则 $J_a'I$ 的中点即为 $\triangle IBC$ 的九点圆心. 又 J_a 是 II_1 中点, 故 I_1J_a' 与 $\triangle IBC$ 的欧拉线关于 I 以 $2:1$ 的位似比位似. 又 J_a 为 $\triangle I_1BC$ 的外心, 则 $J_a'I_1$ 的中点即为 $\triangle I_1BC$ 的九点圆心. 由于 $\triangle ABC$ 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂足三角形, BC 是 I_2I_3 的逆平行线, 故由引理 1.8, 结合等角共轭性质, $J_a'I_1$ 过 $\triangle I_1I_2I_3$ 的 Kosnita 点.

由于 $\triangle I_1I_2I_3$ 与 $\triangle J_aJ_bJ_c$ 关于 I 以 $2:1$ 的位似比位似, 故 $\triangle IBC$ 的欧拉线过 $\triangle J_aJ_bJ_c$ 的 Kosnita 点. 同理, $\triangle ICA$, $\triangle IAB$ 的欧拉线均过 $\triangle J_aJ_bJ_c$ 的 Kosnita 点. 故 $\triangle ABC$ 的 Schiffler 点 S 是 $\triangle J_aJ_bJ_c$ 的 Kosnita 点. □

下面完成对引理 2.3 的证明.

证明 易得引理 3.2 中 $\triangle J_aJ_bJ_c$ 与 $\triangle DEF$ 位似, 则其外心 O, I 与 Kosnita 点 S, K_1 各是一对位似对应点. 故 $OS \parallel IK_1$. 由引理 3.1, IK_1 即为 IP. 由引理 1.7 及引理 3.2, OS 即为 $\triangle ABC$ 的欧拉线. 故 IP 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线. □

IV. 证明 AE_0 垂直于 $\triangle ABC$ 的欧拉线

引理 4.1 设 OI_1 与 BC 交于 G_1, 则 $\angle BAG_1 = \angle CAH_2$.

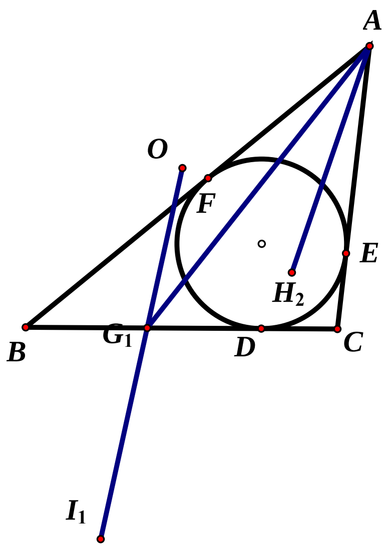

图 9

证明 如图 9 所示, 以顶点字母表示 $\triangle ABC$ 的内角. 则

$$\begin{aligned}\frac{BG_1}{CG_1} &= \frac{S_{\triangle OBI_1}}{S_{\triangle OCI_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot OB\cdot I_1B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-A+\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot OC\cdot I_1C\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-A+\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}\\ &= \frac{\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}},\end{aligned} \tag{1}$$

故

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin \angle BAG_1}{\sin \angle CAG_1} &= \frac{BG_1 \cdot \sin B}{CG_1 \cdot \sin C} \\
&= \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} \cdot 2\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \cdot 2\sin \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

而由于

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin \angle BAH_2}{\sin \angle CAH_2} &= \frac{FH_2 \cdot \sin \angle AFH_2}{EH_2 \cdot \sin \angle AEH_2} = \frac{\sin \angle FEH_2 \cdot \sin \angle AFH_2}{\sin \angle EFH_2 \cdot \sin \angle AEH_2} \\
&= \frac{\cos \angle DFE \cdot \sin \left(B + \frac{C}{2}\right)}{\cos \angle DEF \cdot \sin \left(C + \frac{B}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \left(C + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2}},
\end{aligned} \tag{3}
$$

显然 H_2 在形内, G_1 在 BC 边上,故 $\angle BAG_1 = \angle CAH_2$. □

引理 4.2[6,7] 设 G_1, G_2, G_3 分别为 OI_1, OI_2, OI_3 与 BC, CA, AB 的交点,则 AG_1, BG_2, CG_3 共点于 $\triangle ABC$ 的 Schiffler 点 S.

由引理 4.1 与 4.2, $\triangle ABC$ 的 Schiffler 点 S 与 H_2 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点.

引理 4.3 如图 10 所示, P_1, P_2 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点, AP_1, AP_2 分别与外接圆交于另一点 Q_1, Q_2, T 为弧 BAC 上一点, TQ_2 交 BC 于 R, 则 $\angle ATP_1 = \angle P_2RB$.

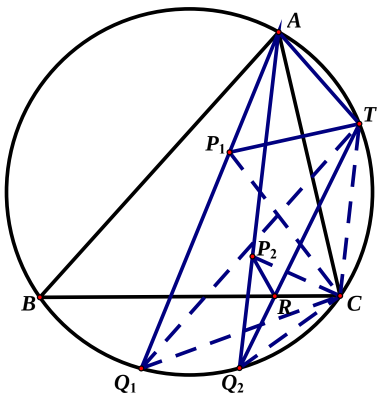

图 10

证明 易得 $Q_1Q_2 \parallel BC, \angle TRC = \angle TAP_1$. 由于

$$\angle TQ_1C = \angle RQ_2C, \angle Q_1TC = \angle Q_1AC = \angle Q_2AB = \angle Q_2CR,$$

故 $\triangle Q_1TC \sim \triangle Q_2CR$. 因此 $\frac{Q_2R}{Q_2C} = \frac{Q_1C}{Q_1T}$, 即

$$Q_2R \cdot Q_1T = Q_1C \cdot Q_2C. \tag{1}$$

因为 $\angle P_1Q_1C = \angle P_2Q_2C$,

$$\angle Q_1P_1C = \angle P_1AC + \angle ACP_1 = \angle Q_2AB + \angle P_2CB$$
$$= \angle Q_2CB + \angle P_2CB = \angle Q_2CP_2,$$

故 $\triangle Q_1P_1C \sim \triangle Q_2CP_2$. 因此 $\frac{Q_1P_1}{Q_1C} = \frac{Q_2C}{Q_2P_2}$, 即

$$Q_2P_2 \cdot Q_1P_1 = Q_1C \cdot Q_2C. \tag{2}$$

联立 (1),(2) 得 $\frac{Q_2R}{Q_2P_2} = \frac{Q_1P_1}{Q_1T}$, 又 $\angle P_1Q_1T = \angle P_2Q_2R$, 故 $\triangle P_1Q_1T \sim \triangle RQ_2P_2$. 故 $\angle AP_1T = \angle P_2RT$. 结合 $\angle TRC = \angle TAP_1$ 可知 $\angle ATP_1 = \angle P_2RB$. □

引理 4.4 如图 11 所示, P_1, P_2 是 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点, P_2 关于 BC 的对称点为 P_2', AP_2 与外接圆交于另一点 Q_2, Q_2P_2' 与外接圆交于另一点 W, 则 $OP_1 \perp AW$.

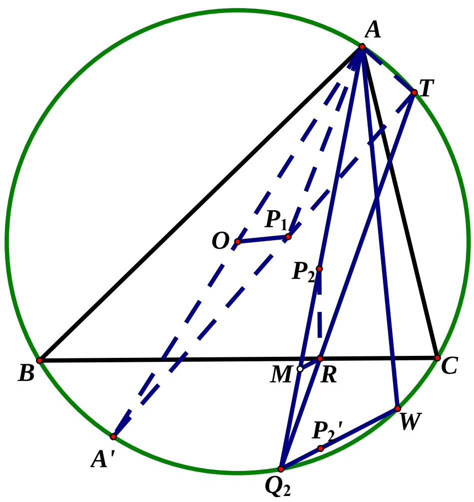

图 11

证明 设 A' 为 A 关于外接圆的对径点, $A'P_1$ 与外接圆交于另一点 T, TQ_2 交 BC 于 R, 则 $AT \perp A'T$. 由引理 4.3, $P_2R \perp BC$. 故 R 为 P_2P_2' 中点.设 P_2Q_2 中点为 M. 因为 $\angle AA'P_1 = \angle P_2Q_2R$,,

$$\angle AP_1A' = 90^\circ + \angle P_1AT = 90^\circ + \angle P_1AC + \angle TAC$$
$$= 90^\circ + \angle Q_2AB + \angle TAC = 90^\circ + \angle Q_2RB = \angle P_2RQ_2,$$

故 $\triangle AP_1A' \sim \triangle P_2RQ_2$. 由 O, M 分别为 AA', P_2Q_2 中点, 得 $\triangle OP_1A' \sim \triangle MRQ_2$. 故

$$\angle OP_1A' = \angle MRQ_2 = \angle TQ_2W = \angle TAW.$$

故由 $AT \perp A'P_1$, 知 $OP_1 \perp AW$. □

由引理 4.4, $\triangle ABC$ 的 Schiffler 点 S 满足 $OS \perp AE_0$, 即 AE_0 垂直于 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

综上, 由 IH_1 平行于 $\triangle ABC$ 的欧拉线, AE_0 垂直于 $\triangle ABC$ 的欧拉线, 得 $AE_0 \perp IH_1$. 原问题得证.

参考文献

[1] C. Kimberling, Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle[J]. Mathematics Magazine, 1994, 67(3):163 187.

[2] 梅向明,刘增贤,王汇淳,王智秋. 高等几何(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[3] 梁延堂. 关于两个三角形成正交透视的几个定理及其应用[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2002, 38(1):18 21.

[4] K.Schiffier, G.R.Veldkamp, W.A.Vander Spek, Problem 1018 and Solution[J]. Crux Math, 1985,11:51; 1986,12:150 152.

[5] J. Rigby. Brief Notes on Some Forgotten Geometrical Theorems [J]. Mathematics & Informatics Quarterly, 1997, 7:156 158.

[6] 严君啸. 一个 Schiffler 点性质的纯几何证明[J]. 中等数学, 2019, 1:19 20.

[7] L.Emelyanov, T.Emelyanova. A Note on the Schiffler Point[J]. Forum Geom, 2003,3:113 116.