

# 数学新星问题征解

第三十二期 (2019.04)

主持: 牟晓生

**第一题.** 设  $A, B, C, D$  内接于圆  $O$ ,  $AC$  与  $BD$  相交于  $E$ .  $P, Q$  是四边形  $ABCD$  的一对等角共轭点. 证明:  $\angle OPE = \angle OQE$ .

(浙江杭州高级中学 张晋源 供题)

---

**第二题.** 给定正整数  $n$ , 证明存在正整数  $m$  满足以下条件: 对于任意  $\{1, \dots, m\}$  的子集  $G$ , 若  $|G| \geq \frac{m}{2}$ , 则存在  $n+1$  个正整数  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , 使得  $\{x_1, \dots, x_n\}$  中任意若干元素与  $x_0$  的和都属于  $G$ .

(上海大学 吴尉迟 供题)

---

**第三题.** 给定正整数  $n$ , 求最大的正常数  $c_n$  满足以下条件: 对于任意  $n$  次实系数多项式  $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ , 若  $f(x)$  的复根全在单位圆上, 则有

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n-j}{k-j} b_j \right| \geq c_n \cdot \left| \sum_{j=0}^n b_j \right|.$$

(浙江杭州二中学生 包恺成 供题)

---

**第四题.** 设  $p \equiv 3 \pmod{8}$  是素数, 且  $p > 3$ . 证明存在正整数  $a, b, c < \sqrt{p}$ , 使得  $p = a^2 + bc$ .

(耶鲁大学 牟晓生 供题)