2019 美国国家队选拔考试试题评析

谢柏庭　韩新淼

(浙江省乐清知临中学, 325600)

指导教师: 羊明亮

近年来, 美国国家队在 IMO 上取得了优异成绩, 其国家队选拔考试试题也备受关注. 今年的试题题目新颖, 解题方法和技巧值得品味. 下面我们整理了今年的试题及其解答, 并加以注记, 供读者参考. 其中部分解答参考了 Evan Chen 的资料.

I. 试 题

1. $\triangle ABC$ 中, M, N 分别为 AB, AC 的中点. 过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, 在切线上取一点 X. 设圆 ω_B 经过点 M 与 B, 且与 MX 相切; 圆 ω_C 经过点 N 与 C, 且与 NX 相切. 证明: 圆 ω_B 与 圆 ω_C 的一个交点在直线 BC 上.

2. 设 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示在模 n 意义下的整数集 (因此, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 有 n 个元素). 求所有的正整数 n, 使得存在一个双射函数 $g:\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 满足 $g(x), g(x)+x$, $g(x)+2x, \cdots, g(x)+100x$ 均为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的双射函数.

3. 在一个由单元格构成的 $n \times n$ 棋盘内, 定义一条长度为 k 的“蛇”为由棋盘内 k 个互不相同的单元格组成的有序序列 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$, 满足对 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, 单元格 S_i 与 S_{i+1} 有一条公共边. 若在棋盘内的一条蛇现对应的单元格序列为 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$, 而 S 为与 S_1 有公共边的空单元格, 则该蛇可以“移动”到 $(S, S_1, S_2, \cdots, S_{k-1})$. 如果一条蛇最初的序列为 $(S_1, S_2, \cdots, S_k)$, 经过有限的一系列移动后, 其序列变为 $(S_k, S_{k-1}, \cdots, S_1)$, 则称该蛇进行了“转身”. 问是否存在正整数 $n > 1$, 使得可以在 $n \times n$ 棋盘内放置一条长度至少为 $0.9n^2$, 且可以进行转身的蛇?

修订日期: 2019-04-15.

4. 我们称函数 $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ 为“好”的, 如果对任意的非负整数 m 和 n, 有

$$f(m+1,n+1)f(m,n) - f(m+1,n)f(m,n+1) = 1$$

成立. 设 $A = (a_0, a_1, \cdots)$ 及 $B = (b_0, b_1, \cdots)$ 为两个整数序列, 如果存在一个“好”的函数 f 使得 $f(n,0) = a_n$, $f(0,n) = b_n$ 对所有非负整数 n 成立 (特别地, $a_0 = b_0$), 则记为 $A \sim B$. 证明: 如果四个整数序列 A, B, C, D 满足 $A \sim B$, $B \sim C$ 及 $C \sim D$, 则有 $D \sim A$.

5. 设 n 为正整数, 将 $3n$ 块蓝宝石和 $3n$ 块绿宝石串成一个环形项链, 且满足无位置连续的三块宝石为同一颜色. Tasty 和 Stacy 合作玩游戏, 他们轮流按如下的规则每次取走位置连续的三块宝石:

(i) 每当轮到 Tasty 取时, 他所取的三块宝石的颜色依位置顺序必须依次为绿, 蓝, 绿;

(ii) 每当轮到 Stacy 取时, 她所取的三块宝石的颜色依位置顺序必须依次为蓝, 绿, 蓝.

如果他们可经过 $2n$ 轮取走全部的宝石, 则他们获胜. 证明: 如果他们可以在由 Tasty 先取时获胜, 则他们也可以在由 Stacy 先取时获胜.

6. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 点 D 在直线 BC 上, 满足 $\angle AID = 90°$. 设 $\triangle ABC$ 中顶点 A 对应的旁切圆切 BC 于点 A_1. 类似定义点 B_1, C_1. 证明: 如果 $AB_1A_1C_1$ 为圆内接四边形, 则 AD 与 $\triangle DB_1C_1$ 的外接圆相切.

II. 解答与评注

题 1. $\triangle ABC$ 中, M, N 分别为 AB, AC 的中点. 过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, 在切线上取一点 X. 设圆 ω_B 经过点 M 与 B, 且与 MX 相切; 圆 ω_C 经过点 N 与 C, 且与 NX 相切. 证明: 圆 ω_B 与 圆 ω_C 的一个交点在直线 BC 上.

证明 此题有多种解法, 我们取其中较有代表性的几种介绍一下.

方法一(等角线导角): 如图 1, 作 $\odot(AMN)$, 并过 X 作其另一条切线, 切点为 Y. 取 AY 中点 L. 下面我们证明 Y在 ω_B 上.

由 M 为 AB 的中点, L 为 AY 的中点知 $ML /\!/ BY$. 又由 AX, XY 为 $\odot(AMY)$ 切线可知, MX 为 $\triangle AMY$ 中的 $M-$ 陪位中线, 从而 $\angle XMB = \angle YML = \angle MYB$. 故 XM 与 $\odot(BMY)$ 相切, 即有 Y 在 ω_B 上.

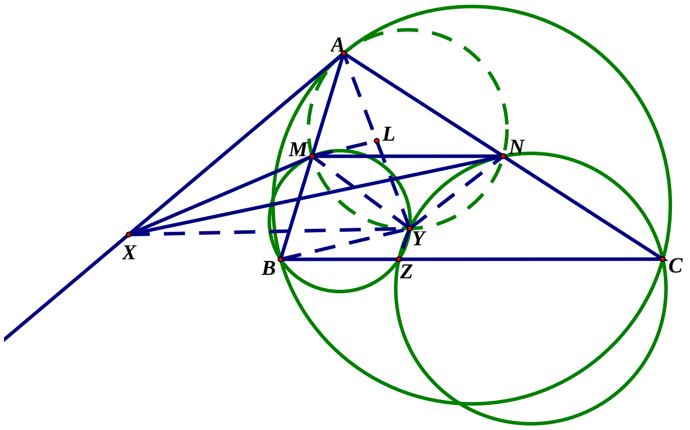


图 1

同理, Y 在 ω_C 上. 那么作 ω_B 与 BC 的另一交点 Z, 有

$$\angle YZC = \angle YMB = \angle YNA,$$

故 Z 也在 $\odot(YNC)$ 上.

故 ω_B, ω_C 与 BC 交于一点, 原命题获证! □

注 此法由供题者 Merlijn Staps 提供.

需要指出两点. 一是 Y 为 $\triangle MZN$ 对 $\triangle ABC$ 的 Miquel 点, 在考虑了 ω_B 与 ω_C 的情况下考虑 Y 并不意外, 猜测 Y 为另一切点, 有 AX 的提示也是合理的选择; 二是此题导角的方法比较有趣, 利用了等角线来转化, 在涉及中线 / 陪位中线 / 内(旁)切圆切点 / 伪内(旁)切圆切点有关的角中可能有用.

方法二: 如图 2, 作 ω_B 与 BC 的另一交点 S, 连结 SM 并延长, 交 CA 于 Y.

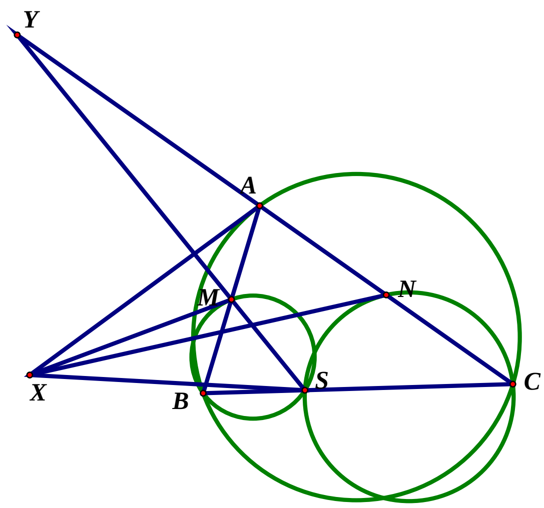


图 2

下面我们证明: (1) $\triangle MXS \sim \triangle AXN$; (2) S 在 ω_C 上.

(1) 的证明 由弦切角定理得

$$\angle XMS = 180^\circ - \angle ABC = \angle XAN,\ \ \angle XMB = \angle MSB,\ \angle XAB = \angle ACB,$$

故结合正弦定理有

$$\frac{AN}{MS} = \frac{AN}{MB}\cdot\frac{MB}{MS} = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{\sin\angle MSB}{\sin\angle ABC} = \frac{\sin\angle MSB}{\sin\angle ACB} = \frac{\sin\angle MSB}{\sin\angle XAB} = \frac{AX}{MX},$$

结合 $\angle XAN = \angle XMS$ 知 $\triangle XAN \sim \triangle XMS$. 故 (1) 证毕!

(2) 的证明 由

$$\angle AXM = \angle XMB - \angle XAB = \angle MSB - \angle ACB = \angle MYA$$

知 A, Y, X, M 四点共圆. 由 (1) 知 $\angle MSX = \angle ANX$, 故有 Y, X, S, N 四点共圆. 从而 $\angle ACB = \angle XAB = \angle XYS = \angle XNS$, 故 XN 与 $\odot(CNS)$ 相切, 即 S 在 ω_C 上, (2) 证毕!

综合 (1),(2), 原命题获证! □

注 此法由 Jetze Zoethout 提供, 可谓一个常规手法, 需要注意的是, 中点条件只用到了 $\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{BA}$, 可用于解决推广的问题.

方法三 (等角共轭点的转化): 如图 3, 取 $\triangle AMN$ 中 X 的等角共轭点 Y, 作 Y 关于 MN 的对称点 S.

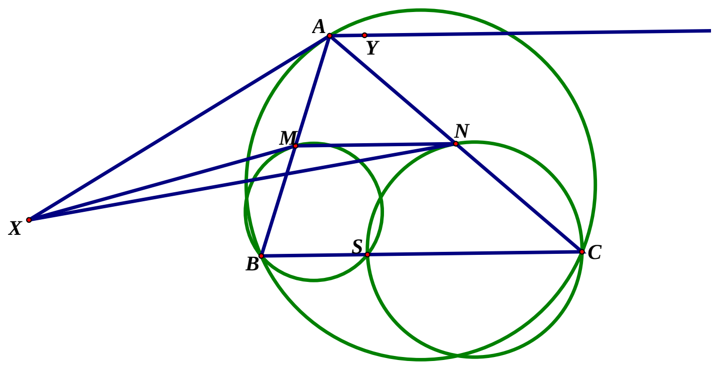


图 3

因为 $\angle YAN = \angle XAM = \angle ACB$, 故 $AY \parallel BC$. 结合 M 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边的中位线可知 S 在 BC 上.

下证 ω_B 过 S. 这是因为

$$\angle XMB = \angle YMN = \angle SMN = \angle MSB.$$

同理 ω_C 过 S. 故 ω_B, ω_C, BC 交于点 S. 原命题获证! □

注 此法由 Anant Mudgal 提供. 事实上, 此题有如下的模型. 如图 4,

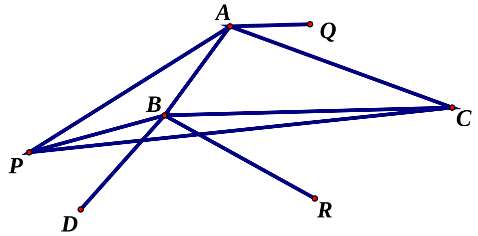


图 4

当 P,Q 为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点时, 对 Q 关于 BC 的对称点 R, 有

$$\angle RBC=\angle QBC=\angle PBD,\ \ \angle RCB=\angle QCB=\angle PCA,$$

故 A 与 R 为 $\triangle PBC$ 的等角共轭点.

此题容易发现 S 与 A 为 $\triangle XMN$ 的等角共轭点, 用此模型一转即有此解法.

方法四 (投影法): 如图 5, 作 ω_B,ω_C 与 BC 的另一交点 S,S', 过 M,N 作 BC 的垂线, 垂足为 E,F, 过 X 作 CA,BA 的垂线, 垂足为 Y,Z.

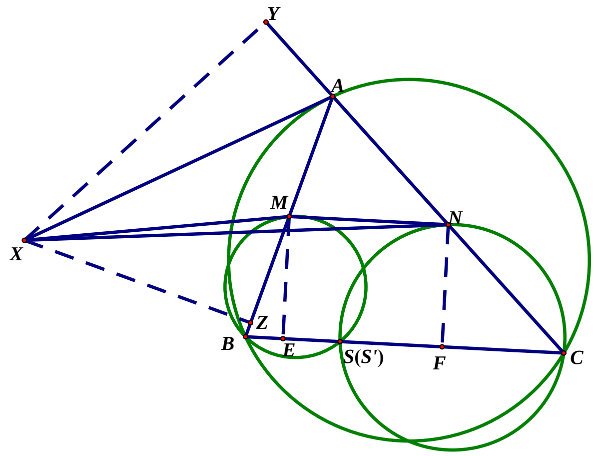


图 5

下面我们证明 $S=S'$. 为此我们只需证明 $ES+FS'=EF$.

注意到

$$\begin{aligned}ES&=ME\cdot\cot\angle MSE=(MB\cdot\sin\angle ABC)\cdot\cot\angle XMB\\&=MB\cdot\sin\angle ABC\cdot\frac{AZ-AM}{XZ}\\&=MB\cdot\sin\angle ABC\cdot\cot\angle ACB-AM^2\cdot\frac{\sin\angle ABC}{AX\cdot\sin\angle ACB}\\&=\frac{1}{2}AC\cdot\cos\angle ACB-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{AX}\cdot AB\cdot AC,\end{aligned}$$

同理

$$FS'=\frac{1}{2}AB\cdot\cos\angle ABC+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{AX}\cdot AB\cdot AC,$$

结合

$$BC = AC \cdot \cos\angle ACB + AB \cdot \cos\angle ABC,\ \ EF = MN = \frac{1}{2}BC$$

知 $FS' + ES = EF$. 故

$$S = S',$$

即有 ω_B, ω_C 与 BC 交于一点 S. 原命题获证! □

评析 投影法也可以解决一般的情形, 某种程度上其揭示了此题只是与角度相关. 实际上, 由于 $\angle XMS, \angle XNS'$ 均为定值, $X \to S$, $X \to S'$ 的角度均保持交比不变, 只需确定三个 X 对应的 S 与 S' 重合即可.

题 2. 设 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示在模 n 意义下的整数集 (因此, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 有 n 个元素). 求所有的正整数 n, 使得存在一个双射函数 $g:\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 满足 $g(x), g(x)+x$, $g(x)+2x, \cdots, g(x)+100x$ 均为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的双射函数.

解 n 为所求当且仅当 n 无不超过 101 的素因子.

一方面, 当 n 不含不超过 101 的素因子时, 取 $g:\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 为 $g(x) = x$, 则 $\forall\, 0 \le k \le 100$, 有 $g(x)+kx = (k+1)x$. 注意到 $1 \le k+1 \le 101$, 故 $(k,n) = 1$, 从而 $k+1, 2(k+1), \cdots, n(k+1)$ 构成一个 $\bmod n$ 的完系, 故 $g(x)+kx$ 为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 到自身的双射.

另一方面, 我们先证明如下引理.

引理 设 p 为素数, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, 则有 $p^\alpha \nmid \sum\limits_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-1}$.

引理证明 当 $\alpha = 1$ 时,

$$\sum_{r=1}^{p} r^{p-1} \equiv p-1 \not\equiv 0 \pmod p,$$

这里用到 $p^{p-1} \equiv 0 \pmod p$ 及 $\forall 1 \le r \le p-1$, $r^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

假设结论对 α 成立, 下面考虑 $\alpha+1$ 的情形.

注意到 $\forall\, 0 \le u \le p-1$, $1 \le r \le p^2$, 有

$$(up^\alpha + r)^{p-1} \equiv r^{p-1} + (p-1)\cdot r^{p-2} \cdot up^\alpha \pmod{p^{\alpha+1}}$$

(用到 $p^{\alpha+1} | p^{j\alpha}$, $2 \le j \le p-1$), 故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p^{\alpha+1}} k^{p-1} &= \sum_{u=0}^{p-1}\sum_{r=1}^{p^\alpha}(up^\alpha + r)^{p-1} \\ &\equiv \sum_{u=0}^{p-1}\sum_{r=1}^{p^\alpha}\left(r^{p-1} + (p-1)\cdot r^{p-2}\cdot up^\alpha\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv p\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-1} + p^\alpha(p-1)\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-2}\sum_{u=0}^{p-1} u\\
&\equiv p\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-1} + p^\alpha(p-1)\cdot\frac{p(p-1)}{2}\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-2}\\
&\equiv p\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-1} \qquad (\text{当}p=2\text{ 时, }2\mid\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-2},\text{ 故此式也成立})\\
&\not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}} \quad (\text{用到}p^\alpha\nmid\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^{p-1}).
\end{aligned}
$$

至此, 引理获证.

回到原题. 考虑下式的值

$$S=\sum_{k=1}^{t}\sum_{m=1}^{n}(-1)^k C_t^k (g(m)+km)^t,$$

其中, $1\le t\le 100$.

由于 $g(m)+km$ $(m=1,\cdots,n)$ 构成 $\bmod n$ 的完系, 所以

$$
\begin{aligned}
S&=\sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k\sum_{m=1}^{n}(g(m)+km)^t\\
&\equiv\sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k\sum_{m=1}^{n} m^t\\
&\equiv\sum_{m=1}^{n} m^t\cdot(1-1)^t\\
&\equiv 0 \pmod n. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

而记 $f_m(x)=(g(m)+mx)^t$, 则 $f_m(x)$ 为首项系数为 m^t 的 t 次整系数多项式, 于是

$$\triangle^{(t)} f_m(x)=t!\cdot m^t,$$

其中 $\triangle h(x)=h(x+1)-h(x)$. 因此

$$
\begin{aligned}
S&=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k (g(m)+km)^t\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^t\cdot\triangle^{(t)} f_m(0)\\
&=(-1)^t\cdot t!\cdot\sum_{m=1}^{n} m^t.
\end{aligned}
$$

假设 n 有不超过 101 的素因子 p, 设 $n=lp^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{N}^*, l\in\mathbb{N}^*, p\nmid l)$, 则

$$\sum_{m=1}^{n} m^t=\sum_{u=0}^{l-1}\sum_{r=1}^{p^\alpha}(up^\alpha+r)^t$$

$$\begin{aligned}&\equiv \sum_{u=0}^{l-1}\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^t\\&\equiv l\sum_{r=1}^{p^\alpha} r^t \pmod{p^\alpha}.\end{aligned}$$

取 $t=p-1$, (则$1\le t\le 100$), 由引理及 $p\nmid l, p\nmid t!$ 即知

$$S\equiv(-1)^{p-1}\cdot(p-1)!\cdot l\sum_{r=1}^{p^\alpha}\not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

这与 $(*)$ 矛盾!

综上所述, n 满足要求的充要条件为 n 不含不超过 101 的素因子. 证毕! □

评析 这道题的整体想法是算两次. 一方面固定 $g(m)+km$ 的 k, 利用完系的整体上的性质去计算, 另一方面固定 $g(m)+km$ 的 m, 化为关于 k 的多项式, 且利用差分直接让这个多项式成为常数多项式, 再进行求和. 总体来说是一道比较好的数论训练题, 涉及了比较多的东西.

题 3. 在一个由单元格构成的 $n\times n$ 棋盘内, 定义一条长度为 k 的"蛇"为由棋盘内 k 个互不相同的单元格组成的有序序列 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$, 满足对 $i=1,2,\cdots,k-1$, 单元格 S_i 与 S_{i+1} 有一条公共边. 若在棋盘内的一条蛇现对应的单元格序列为 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$, 而 S 为与 S_1 有公共边的空单元格, 则该蛇可以"移动"到 $(S,S_1,S_2,\cdots,S_{k-1})$. 如果一条蛇最初的序列为 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$, 经过有限的一系列移动后, 其序列变为 $(S_k,S_{k-1},\cdots,S_1)$, 则称该蛇进行了"转身". 问是否存在正整数 $n>1$, 使得可以在 $n\times n$ 棋盘内放置一条长度至少为 $0.9n^2$, 且可以进行转身的蛇?

解 下面给出两种解答方法.

方法一: 答案是肯定的, 我们给出一种构造方法: 取 n 满足 $(n-4)(n-5)>0.9n^2$ 且 $2\nmid n$. 设 $n=2k+1.k\in\mathbb{N}^*$.

下面我们在 $n\times n$ 棋盘中放入一条长为 $(n-4)\times(n-5)$ 的"蛇," 并使它可以"转身". 如图 6.

称蓝实线标注的区域为"主路"; 称蓝虚线标注的区域为"副路"; 称黑实线标注的区域为"$A-$连接路"; 称黑虚线标注的区域为为"$B-$连接路".

下面我们将"蛇"尾放在 A_1 格, 并让"蛇"按"主-副路"顺序延展, 此时"蛇"头应未到 A_{k-1} 格 (否则共 $1+(n-4)(n-5)$ 格).

下面我们分步操作使"蛇"转身.

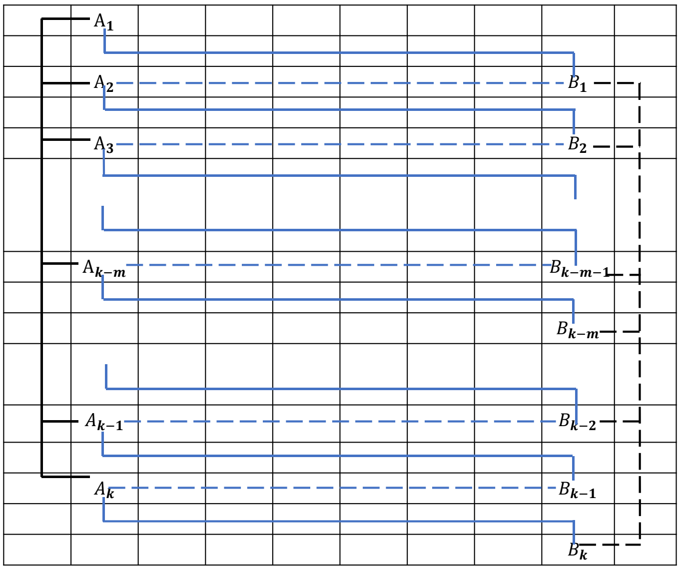


图 6

第一步: 让"蛇"沿"主-副路" (即 $A_1 \to B_1 \to A_2 \to B_2 \to \cdots \to A_k \to B_k$) 走到 B_{k-1}. 再沿着"$B-$连接路"走到 B_k, 再沿"主-副路"走回 A_k, 再沿"$A-$连接路"走向 A_1. 此时"蛇"尾已沿"主-副路"走过 A_1.

第 m 步: 让"蛇"沿"主-副路"走到 B_{k-m}, $2 \le m \le k$. 此时"蛇"尾已走过 B_k. (否则"主-副路"中, A_1 到 B_{k-m} 及 A_{k-m+2} 到 B_k 均为"蛇"一部分. (用到 (m-1) 步定义) 此时蛇长不少于 $(n-4)(n-5)+1$, 这不可能!) 再让"蛇"沿"$B-$连接路"走到 B_k, 再让"蛇"沿"主-副路"走到 A_{k-m+1}, 再让"蛇"沿"$A-$连接路"走回 A_1. 此时"蛇"尾已走过 A_1.

如此便知第 k 步时, "蛇"已转身. 故 $(*)$ 成立.

特别地, 因 $0.9n^2 < (n-4)(n-5)$, 故 n 满足条件!

综上, 存在满足条件的 n, 原题答案是肯定的. □

方法二: 取 $n = 10^{10}$, 并令 $m = n-3$, 下面用大正方形表示整个方格表, 小正方形表示方格表第 2 至第 $m+1$ 行及列构成的子方格表.

首先, 将长度为 $0.9n^2$ 的蛇按图 7-1 方式放置, 其中箭头表示蛇首的位置, 实线表示蛇身的位置 (蛇身长度之外的部分无蛇身).

将图 7-1 中的蛇沿图 7-2 中虚线及实线运动, 得到图 7-2 (从箭头所在处沿虚线出发, 一直走, 再沿实线, 按图 7-2 中所示路径到达图 7-2 所示位置) (图 7-2 中小正方形左部空出 3 列).

我们说明在上述运动过程中蛇不会碰到身体 (之后蛇运动过程中不会碰到自己的证明方法完全类似).

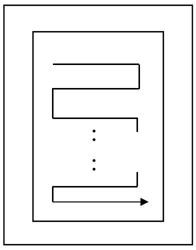


图 7-1

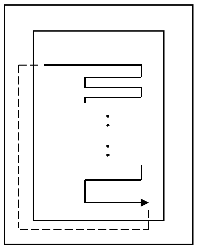


图 7-2

设在图 7-2 中小正方形内实线最末端方格为 A, 最前端 (即箭头所在处) 方格为 B. 假设蛇在上述运动过程中在方格 5 处碰到身体.

则沿着图 7-1 中实线, 从 S 到 B 的这段方格此时均被蛇占住, 沿图 7-2 中实线, 从 A 到 S 这段方格均被蛇占住.

又沿图 7-1 中实线, 从 S 到 B 的这段方格包含了沿图 7-2 中实线, 从 S 到 B 的这段方格.

故此时沿图 7-2 中实线, 从 A 到 B 的这整段方格均被蛇占住. 故

$$0.9n^2 > m^2 - 3m = (n-3)^2 - 3(n-3),$$

这与 $n = 10^{10}$ 矛盾!

类似地, 可让蛇从图 7-2 运动到图 7-3, 图 7-4, 图 7-5, $\cdots$, 一直到图 7-6. 至此, 我们让蛇逆时针旋转了 $90°$, 再进行一轮类似的操作, 则可变为图 7-7, 即完成了转身.

因此, 这样的 n 存在. □

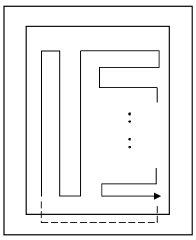


图 7-3

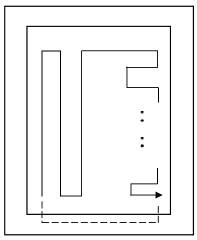


图 7-4

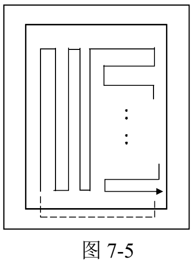


图 7-5

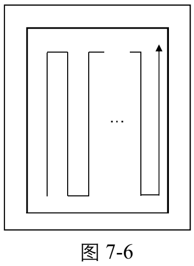


图 7-6

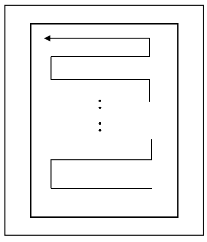


图 7-7

评析 (1). 此题的第一步是猜答案, 答案是肯定还是否定对应了哲学中的两个东西: 量变和质变. 站在肯定这边, 就希望通过量变的积累来促进质变; 站在

否定这边, 就希望找一个变化过程中不变的"质", 即不变量.

(2). 对于构造, 此题关键在于问自己这两个问题并予以解答:

(i) "蛇"如何转身?

(ii) $0.9n^2$ (可猜测为 $cn^2, c<1$) 意味着什么?

(ii) 是容易回答的. "蛇"几乎占据了整个盘. 其可缓冲的空间就只有 (应是) $n-$次级别. 因此若可转身, 转身过程中必有一大部分仍在原来"蛇"的位置上. 想要不撞上这些部分, 就要尽可能地"头咬尾", 而对于 (i) 的回答则导致了两种解法的产生.

法一据 Nikolai Beluhov (供题者) 解答整理. 据原解答, 其先将图简化为了平面图, 显著简化了原命题, 从而也使全过程很有条理. 法二有一点有趣, 为了转身他没有选择"反向", 而是选择了"旋转", 相当于分两步完成了"转身", 这需要一点前瞻的眼光.

题 4. 我们称函数 $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{Z}$ 为"好"的, 如果对任意的非负整数 m 和 n, 有

$$f(m+1,n+1)f(m,n)-f(m+1,n)f(m,n+1)=1$$

成立. 设 $A=(a_0,a_1,\cdots)$ 及 $B=(b_0,b_1,\cdots)$ 为两个整数序列, 如果存在一个"好"的函数 f 使得 $f(n,0)=a_n$, $f(0,n)=b_n$ 对所有非负整数 n 成立 (特别地, $a_0=b_0$), 则记为 $A\sim B$. 证明: 如果四个整数序列 A,B,C,D 满足 $A\sim B$, $B\sim C$ 及 $C\sim D$, 则有 $D\sim A$.

证明 下面给出两种证明方法.

方法一: 由 $A\sim B$, $B\sim C$, $C\sim D$ 知 $a_0=b_0=c_0=d_0$. 记其为 k. 设 f,g,h 分别为 $(A,B),(B,C),(C,D)$ 对应的函数, 并构造如下无限阵列

$$\begin{bmatrix}
\ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \ddots & \cdots & \cdots & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & g(2,2) & g(2,1) & b_2 & f(1,2) & f(2,2) & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & g(1,2) & g(1,1) & b_1 & f(1,1) & f(2,1) & \cdots & \cdots \\
\cdots & c_3 & c_2 & c_1 & k & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & h(2,1) & h(1,1) & d_1 & & & & \\
\cdots & \cdots & h(2,2) & h(1,2) & d_2 & & & & \\
 & & & & d_3 & & & & \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{bmatrix}$$

下面只需在第四象限中填入满足要求的数即可.

注意到, 要求为: 对任一 2×2 子矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{若其在二,四象限} \\ -1, & \text{若其在一,三象限} \end{cases}, \tag{$*$}$$

故只需证明如下结论: 若我们已有一个 3×3 子阵列

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & \end{bmatrix},$$

其完整的 2×2 子矩阵均满足 $(*)$, 则可在右下角填一个数, 并保持该性质不变.

事实上, 只需考虑其完全在第四象限中的情况 (否则可适当更改 a,b,c,x,p 的正负号, 右下角方格满足条件不变), 那么可在其中填入数

$$r = \begin{cases} \frac{qz+1}{y}, & \text{若 } y \neq 0; \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 1, & \text{若 } y = 0, \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

对于 (1), 有

$$\begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix} = 1,$$

且因 $bz \equiv xq \equiv -bx \equiv 1 (\bmod y)$, 故

$$zq \equiv -1 (\bmod y),$$

有 $r \in \mathbb{Z}$.

对于 (2), 因 $-bx = bz = xq = 1$, 故 $zq = 1$, 有

$$\begin{vmatrix} y & z \\ q & r \end{vmatrix} = 1,$$

故均满足要求!

因此, 可在第四象限中填入满足要求的数, 即有 $A \sim D$, 证毕! □

方法二: 我们先证明一个引理.

引理 对数列 $A = \{a_0, a_1, \cdots\}$ 及 $B = \{b_0, b_1, \cdots\}$, $A \sim B$ 当且仅当 $a_0 = b_0, a_0 \mid a_1 b_1 + 1$, 且 $a_n \mid a_{n-1} + a_{n+1}, b_n \mid b_{n-1} + b_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ (上述式子中, 当 0 作除数时,"整除"意为被除数为 0).

引理证明 首先证必要性. 显然

$$a_0 = b_0, \tag{1}$$

由 $a_0 f(1,1) - a_1 b_1 = 1$ 知

$$a_0 | a_1 b_1 + 1. \tag{2}$$

而对 $n \in \mathbb{N}^+$, 由于

$$f(n,1)a_{n-1} - f(n-1,1)a_n = 1,\ \ f(n+1,1)a_n - f(n,1)a_{n+1} = 1,$$

故

$$a_n \mid f(n,1)a_{n-1} - 1,\ \ a_n \mid f(n,1)a_{n+1} + 1.$$

因此

$$a_n \mid f(n,1)(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

当 $a_n = 0$ 时, $f(n,1)a_{n-1} = 1,\ \ f(n,1)a_{n+1} = -1$. 故

$$(a_{n-1} + a_{n+1}) \cdot f(n,1) = 0,\ \ 且\ \ f(n,1) \neq 0,$$

因此 $a_{n-1} + a_{n+1} = 0$, 有

$$a_n \mid a_{n-1} + a_{n+1}.$$

当 $a_n \neq 0$ 时, $(f(n,1), a_n) = 1,\ \ a_n \mid a_{n-1} + a_{n+1}$. 故总有

$$a_n \mid a_{n-1} + a_{n+1}. \tag{3}$$

同理

$$b_n \mid b_{n-1} + b_{n+1}. \tag{4}$$

综合 (1), (2), (3), (4), 必要性得证.

下证充分性.

我们先证明: 可以先填入 $f(1,1), f(2,1), \cdots$, 使之满足要求, 同时满足数列 $(b_1, b_2, \cdots)$ 与 $(b_1, f(1,1), f(2,1), \cdots)$ 满足条件 (1), (2), (3), (4). $(*)$

我们先用归纳法填入 $f(1,1), f(2,1), \cdots$, 选取 $f(1,1) \in \mathbb{Z}$, 使得

$$f(1,1)a_0 = a_1 b_1 + 1,$$

由 (2) 可知此可行.

当 $f(1,1), f(2,1), \cdots, f(n,1)$ 已取定时, 取

$$f(n+1,1) = \begin{cases} 1, & 当\ a_n = 0 \\ \frac{f(n,1)a_{n+1}+1}{a_n}, & 当\ a_n \neq 0 \end{cases}$$

对于前者, 有 $f(n,1)a_{n-1}=1$, 及 $a_{n-1}+a_{n+1}=0$, 故 $f(n,1)a_{n+1}=-1$, 有

$$f(n+1,1)a_n-f(n,1)a_{n+1}=1.$$

对于后者, 因

$$f(n,1)a_{n+1}-f(n-1,1)a_n=1,\ \ f(n+1,1)a_n-f(n,1)a_{n+1}=1,$$

结合 $a_n \mid a_{n-1}+a_{n+1}$ 知

$$f(n+1,1)+f(n-1,1)\in\mathbb{Z},$$

故

$$f(n+1,1)\in\mathbb{Z}.$$

如此我们得到了满足要求的 $f(1,1),f(2,1),\cdots$, 记为 $P_1,P_2,\cdots$, 并记 $P_0=b_1$, 则对 $P=(P_0,P_1,\cdots)$ 及 A 类似于必要性证明知: 因

$$a_{n-1}P_n-a_nP_{n-1}=1,\ \ a_nP_{n+1}-a_{n+1}P_n=1,$$

故

$$P_n \mid P_{n-1}+P_{n+1}.$$

类似地,

$$b_1|b_2P_1+1.$$

故 P 与 $B^*=(b_1,b_2,\cdots)$ 满足 (1), (2), (3), (4).

如此反复即可一行一行地填满第一象限, 充分性得证!

综上所述, 引理获证!

回到原题. 由 $A\sim B, B\sim C, C\sim D$ 知 $a_0=b_0=c_0=d_0$, 记为 k. 且

$$k \mid a_0b_0+1,\ \ k \mid b_0c_0+1,\ \ k \mid c_0d_0+1,$$

故

$$k \mid a_0d_0+1.$$

又由 $A\sim B, C\sim D$ 知

$$a_n \mid a_{n-1}+a_{n+1},\ \ d_n \mid d_{n-1}+d_{n+1}.$$

故 A, D 满足 (1), (2), (3), (4), 有 $A\sim D$. 证毕! □

评析 此题要特别小心 “0”.

两种做法体现对证明两个事物 A 与 B 之间关系的问题的两种看法. 一是为 $A\sim B$. 我们只需要考虑 A 与 B 之间的关系. 例如为证 $A=B$, 证 $A-B=0$. 法

一采取了这种观点, 此法由 Nikolai Beluhov 提供, 颇具巧思; 二是为 $A \sim B$. 我们挖掘 A 与 B 自身的性质, 发现它们具有某个性质 P, 从而得到 $A \sim B$. 例如为证 $A = B$, 分别算出 A 和 B. 法二采取了这种观点, 更为自然. 需要指出这两种看法也可用于利用这类条件, 并且它们并没有优劣之分, 甚至也没有自然或不自然的说法, 只是两种不同的审视问题的眼光而已. 最好都要意识到, 并分别进行试探, 选择更能充分利用条件, 更能突破的路.

题 5. 设 n 为正整数, 将 $3n$ 块蓝宝石和 $3n$ 块绿宝石串成一个环形项链, 且满足无位置连续的三块宝石为同一颜色. Tasty 和 Stacy 合作玩游戏, 他们轮流按如下的规则每次取走位置连续的三块宝石:

(i) 每当轮到 Tasty 取时, 他所取的三块宝石的颜色依位置顺序必须依次为绿, 蓝, 绿;

(ii) 每当轮到 Stacy 取时, 她所取的三块宝石的颜色依位置顺序必须依次为蓝, 绿, 蓝.

如果他们可经过 $2n$ 轮取走全部的宝石, 则他们获胜. 证明: 如果他们可以在由 Tasty 先取时获胜, 则他们也可以在由 Stacy 先取时获胜.

证明 用 B 代表蓝宝石, G 代表绿宝石.

因为无位置连续的三块宝石同色, 所以可将圆圈上的宝石按颜色分为长为 1,2 的若干段. 注意到蓝的段数与绿的段数相同, 且蓝, 绿宝石总数相同, 故蓝, 绿的长为 1 的段数相同, 设为 a, 蓝, 绿的长为 2 的段数相同, 设为 b.

下证: 可在 Tasty 先取时获胜当且仅当 $a \geq b$ (也即 $b \leq n$).

先证必要性.

假设 $b > n$. 下考虑圆周上各长度不小于 2 的蓝段长度减 1 之和 (即 $\sum\limits_{l \geq 2}(l-1)$), 记为 S.

⋯ B ~~G B G~~ G ⋯
⋯ G ~~G B G~~ G ⋯
⋯ B ~~G B G~~ B ⋯

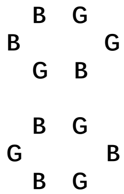
⋯ B ~~B G B~~ G ⋯
⋯ G ~~B G B~~ G ⋯
⋯ B ~~B G B~~ B ⋯

注意到 Tasty 操作时, S 不减, 且 Stacy 操作时, S 至多减 1. 而一开始 $S = b > n$, 最终 $S = 0$, 且 Stacy 共操作了 n 次. 故矛盾!

必要性获证.

再证充分性.

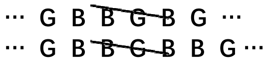
我们采用数学归纳法进行证明.



当 $n=1$ 时, 此时圆周上只有两种情况, 容易验证结论成立.

假设结论对 $n-1$ 成立. 下面考虑 n 的情形.

若 $b=0$, 此时结论显然成立. (每两轮两人连续地去掉 $B\,G\,B\,G\,B\,G$ 即可) 下设 $b \geq 1$.



注意到长为 1 的蓝, 绿段一样多及 $b \geq 1$, 所以必存在一个长为 1 的绿段与一个长为 2 的蓝段相邻. Tasty 在该步去掉以该绿宝石为中间者的连续三块宝石, 则删去后仍不会出现连续三块宝石同色, 且长为 2 的蓝段个数必减 1, 长为 2 的绿段个数不变.

类似地, 下一步 Stacy 可以操作, 使得仍不出现连续三块宝石同色, 且长为 2 的绿段个数减 1, 长为 2 的蓝段个数不变 (这只需用到长为 1 的蓝段个数不少于长为 1 的绿段个数).

于是, 这样操作两轮以后, 立即变为 $n-1$ 时的情形 (因此此时 $b' = b-1 \leq n-1$). 由归纳假设立证.

充分性得证.

同理, 有可在 Stacy 先取时获胜当且仅当 $a \geq b$.

由此立得所证结论. $\square$

评析 此题再次体现了题 4 注中体现的两种眼光, 让人颇为惊讶的是, 似乎求出充要条件本应是困难的, 但在此题中考虑两种操作方式的互化是极为困难的. 原解答注中特别提及以下三点:

(1) “无位置连续的三块宝石同色”是必要的. 如 G G B G B G B G G B B B 即为反例.

(2) 通常归纳法无法保证上述条件的传递性.

(3) 哪怕加强归纳, 归纳过渡也并不容易. (并不一定对)

可见有些题无法用“第一印象”来判断方向的, 更体现了两点都要尝试的重要性.

题 6. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 点 D 在直线 BC 上, 满足 $\angle AID = 90°$. 设 $\triangle ABC$ 中顶点 A 对应的旁切圆切 BC 于点 A_1. 类似定义点 B_1, C_1. 证明: 如果 $AB_1A_1C_1$ 为圆内接四边形, 则 AD 与 $\triangle DB_1C_1$ 的外接圆相切.

此题几何方法不唯一, 但无一例外地与下述证明中涉及的几何模型有关.

证明 设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的旁心分别为 I_A, I_B, I_C, 内切圆 $\odot I$ 在 AB, AC 上切点为 X, Y, 过 I 作 AD 的垂线, 垂足为 E; B_1C_1 交 AD 于 M. 我们要证明:

(1) A_1, C_1, I_C 三点共线;

(2) I 在 B_1C_1 上;

(3) AD 为 $\odot(AC_1B_1)$ 的切线;

(4) AD 为 $\odot(DC_1B_1)$ 的切线.

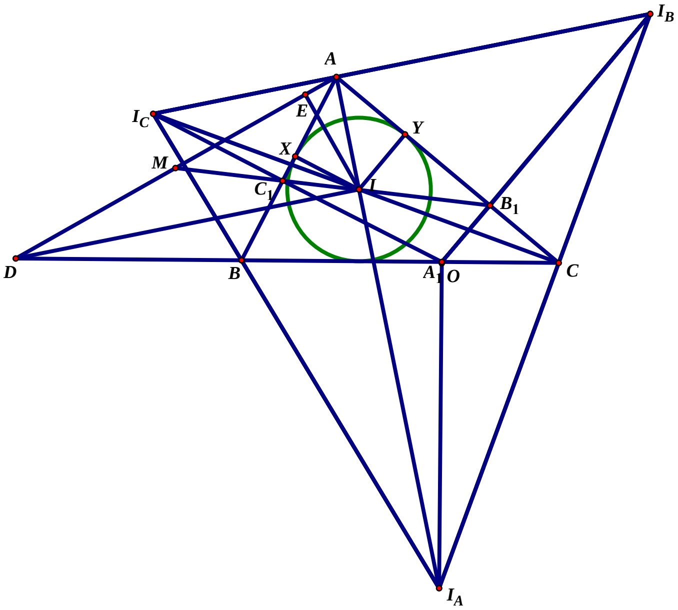


图 8

(1) 的证明:

我们注意到 I_CC_1, I_BB_1, I_AA_1 三点共线于 $\triangle I_AI_BI_C$ 外心 O, 且

$$\angle OC_1A = \angle OB_1A = 90°,$$

有 A, C_1, B, O 四点共圆. 由于 O, A_1 均在 A_1I_A 上, 且均在 $\odot(AB_1C_1)$ 上, 且在 B_1C_1 同侧, 故

$$O \equiv A_1.$$

即有 I_C, C_1, A_1 三点共线. (1) 证毕!

(2) 的证明:

对直线 I_CAI_B 及直线 BA_1C, 由 Pappus 定理, 结合 (1) 即证!

(3) 的证明:

由于

$$\angle DIB = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ICB,\ \ \angle AID = \angle IED = 90^\circ,$$

故

$$DB \cdot DC = DI^2 = DE \cdot DA,$$

有 A, E, B, C 四点共圆. 又A, E, X, I, Y 五点共圆, 故

$$\angle EBX = \angle ECY,\ \ \angle EXB = \angle EYC,$$

则有 $\triangle EBX \sim \triangle ECY$. 故

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BX}{CY} = \frac{AC_1}{AB_1}.$$

又 $\angle BEC = \angle C_1AB_1$, 故

$$\triangle BEC \sim \triangle C_1AB_1.$$

因此 $\angle AB_1C_1 = \angle ECB = \angle EAB$, 有 AD 为 $\odot(AB_1C_1)$ 切线. (3) 证毕!

(4) 的证明:

由 (3) 知

$$\angle MAI = \angle MAC_1 + \frac{1}{2}\angle B_1AC_1 = \angle AB_1C_1 + \angle IAB_1 = \angle AIM.$$

又 $AI \perp DI$, 故 $AM = MI = DM$. 结合 (3) 知

$$DM^2 = AM^2 = MC \cdot MB,$$

由切割线定理的逆知 (4) 证毕!

综上, 原命题获证. □

评析 我们提取出那几个几何模型.

如图, $\triangle ABC$ 中, 内心为 $I, \angle A, \angle B, \angle C$ 所对的旁心分别为 I_A, I_B, I_C; D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的旁切圆切点, 过 I 作 AI 的垂线, 交 BC 于 R, M 为 AR 中点, K 为弧 BC 中点, L 为弧 BAC 中点, P 为 LI 与 $\odot(ABC)$ 交点, 则有

(1) I_CF, I_BE, I_AD 三点共线于 $\triangle I_AI_BI_C$ 外心 V, V 也为 $\triangle DEF$ 关于 $\triangle ABC$ 的 Miquel 点;

(2) A, L, F, E 四点共圆, 这意味着 L 也为 Miquel 点;

(3) K, P, R 三点共线, 这揭示了伪内切圆切点与此题关联, 且还有 AD, AP

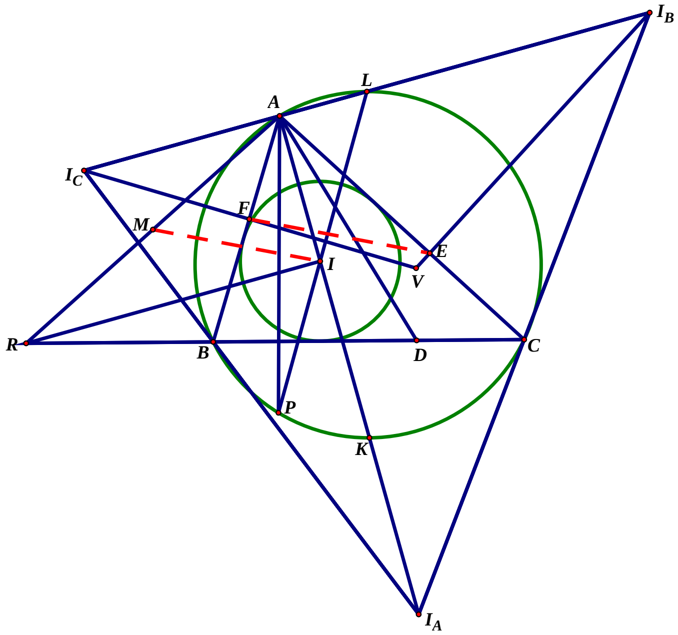


图 9

为 $\angle BAC$ 的等角线;

(4) AR 为 $\odot(AFE)$ 的切线. 由此立知 $FE \parallel IM$.

如果已知上述结论, 则很快猜出关键. 证明 I 在 FE 上, Pappus 定理稍生僻一些, 但若看出 (2),(3) 后, 可用计算 AI 与 LI 分 FE 的比相等来证明, 简单且自然.

总评 今年美国国家队选拔考试的六个问题, 难度适中, 较为平稳, 具有一定的区分度, 题目新颖, 并注重考查学生对解题策略 (而非知识套用) 的探索能力. 总的来说, 值得一做, 值得思考品味.