定理“三用”

冯跃峰

在数学学习中, 我们无一例外地都要遇到许多定理. 定理之所以称之为“定理”, 是因为利用它可以解决许多问题. 我们通常所说的运用定理, 都是指直接运用定理的结论. 但笔者认为, 定理的作用远不止如此. 它至少有 3 个基本用法, 简称之为“三用”.

第一用——用结论. 它是定理运用的最基本方式, 也为大家所熟悉.

第二用——用思想. 它是定理运用的另一种重要方式, 常常被大家所忽略. 所谓用思想, 是指运用定理发现过程或证明过程中隐含的深刻的数学思想. 定理处理问题的方式方法往往是非常经典的, 它可以指导我们按照相应的思路或模式处理相关问题.

第三用——用变式. 它是定理运用的一种高级方式, 常常是问题解决的关键所在, 甚至是解题的“神来之笔”. 所谓用变式, 是指定理改变原始形式后得到的一种新的表现形式的运用. 这种“新形式”可能与定理的“原形”等价, 也可能是定理“原形”的加强或弱化. 比如, 限定相关对象的特定表现形式, 或者减弱或加强定理中的有关条件等等.

下面用一个例子来说明.

问题 平面上给定 n 个点($n \geq 5$), 其中无 3 点共线, 以这些点为顶点的凸四边形的个数的最小值记为 $f(n)$, 求证: $f(n) \geq \binom{n-3}{2} + f(n-2)$. (原创题)

【题感】 从条件看, $n \geq 5$ 是一个“题眼”, 可从 $n = 5$ 的情形突破.

此时, 不等式变为: $f(n) \geq \binom{2}{2} + f(3) = 1 + 0 = 1$. 这是简单的 Klein 问题, 我们将其作为引理.

引理 平面上给定 5 个点, 其中无 3 点共线. 则存在一个以这些点为顶点的凸四边形.

关于凸性的证明, 自然是考虑点集的凸包.

修订日期: **2019-04-12.**

【研究凸包】当凸包是四边形, 五边形时, 结论显然成立. 下面考虑凸包是三角形的情形. 设凸包为 $\triangle ABC$, 另两点 D, E 在 $\triangle ABC$ 内. 此时怎样找到凸四边形呢?

利用凸四边形的特性即可. 这当然要先判断谁必定为顶点.

【目标设想】首先, 四边形必定含有 D, E, 否则, D 或 E 在 $\triangle ABC$ 内不构成凸四边形. 其次, D, E 是凸四边形的相邻两个顶点, 否则对角线 DE 与另一对角线相交, 但 DE 不与任何已有线段相交, 矛盾.

【发掘性质】根据凸四边形的特性, 四边形的另两个顶点在直线 DE 的同侧, 由此想到用直线 DE 分割剩下的点, 考察这些点在直线两侧的分布即可.

【直线分割】作直线 DE, 则直线 DE 必与 $\triangle ABC$ 的边界相交, 不妨设与 AB, AC 相交于 M, N, 则 $MBCN$ 是凸四边形(凸图形边界上若干点依次连接形成的图形是凸多边形), 进而 D, E, B, C 构成一个凸四边形, 命题获证.

回到原问题: $f(n) \geq \binom{n-3}{2} + f(n-2)$.

【用"结论"】从目标看, 联想到上述引理, 自然想到取 5 点组, 每个 5 点组对应一个凸四边形(**用结论**).

这似乎可以找到 $\binom{n}{5}$ 个凸四边形. 但题中的组合数为什么是 $\binom{n-3}{2}$ 呢? —上述对应不是单射, 需要重新建立对应, 避免计数重复, 这是本题的难点.

【数值分析】显然, 常数 $\binom{n-3}{2}$ 也是一个"题眼", 它隐含这样的事件: 在 $n-3$ 个点中选取 2 个点. 这里的 $n-3$ 又意味着什么呢? —先在 n 个点中"去掉"3 个点, 而剩下的 $n-3$ 个点的任何 2 点组都应对应一个凸四边形(单射).

【用"思想"】如何"去掉"3 个点? 联想到引理的证明中, 关键的一步是: "直线分割三角形的 3 顶点". 由此想到用"最大三角形"控制点集的存在域(图 1), 或者采用缩小包围圈策略确定存在域(注意, 外围三角形 3 顶点未必是已知点, 但每边上至少一个已知点).

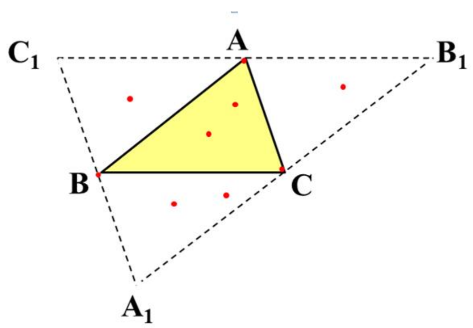

图 1

这样, 对"边界 $\triangle ABC$" (顶点在外围 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边界上) 的 3 顶点外的

任何 2 点组, 都可作直线分割“边界三角形”的 3 顶点, 找到凸四边形(**用思想**).

【用“变式”】 至于后面的 $f(n-2)$, 不过是适当去掉 2 个点(“边界$\triangle ABC$”的某 2 个顶点), 化为 $n-2$ 个点的同构问题.

但需要前后 2 组四边形互异, 这就要适当控制前面的四边形的属性: 含有“边界 $\triangle ABC$”的 3 顶点中的两点(**用变式**), 以保证互异性. 将上述思路具体化, 即可完成解题.

【最大三角形控制】 任意 3 点都构成一个三角形, 得到有限个三角形. 取一个面积最大的三角形, 设为 $\triangle ABC$. 作外围三角形 $\triangle A_1B_1C_1$, 使 $\triangle ABC$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线三角形. 由 $\triangle ABC$ 的最大性, 其他的 $n-3$ 个点都被 $\triangle A_1B_1C_1$ 覆盖 (注意 A_1, B_1, C_1 未必是已知点).

【直线分割】 对 A, B, C 外 $n-3$ 个点中的任意两点 P, Q(在 $\triangle A_1B_1C_1$ 内), 作直线 PQ , 则直线 PQ 必与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边界相交 (图 2).

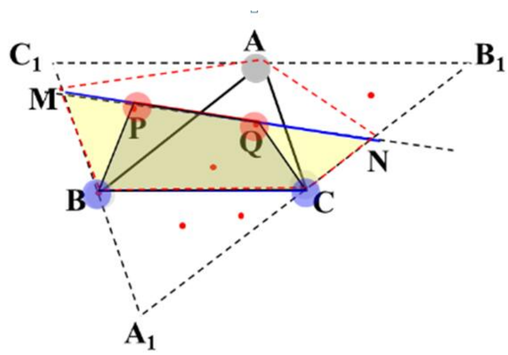

图 2

不妨设与 A_1B_1, A_1C_1 分别交于点 M, N, 则 M, N 与 A, B, C 构成凸 5 边形(因为 5 点都在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边界上). 由于 A, B, C 中至少有两点在直线 PQ 的同侧, 不妨设 B, C在直线 PQ 的同侧, 则 MN, BC 构成以 MN 为一边的凸四边形. 进而 PQ, BC 构成凸四边形(因为 PQ 在线段 MN 上).

【加权四边形计数】 因为在 $n-3$ 个点取 2 个点 P, Q 有 $\binom{n-3}{2}$ 种取法, 所以含有 A, B, C 中两个点的凸四边形(称为加权四边形) 至少有 $\binom{n-3}{2}$ 个.

【化归同构问题】 以下只需证明: 至多含有 A, B, C 中一个点的凸四边形(非加权四边形) 至少有 $f(n-2)$ 个, 这去掉 A, B, C 中的某两个点, 便化为 $n-2$ 个点的同构问题.

实际上, 去掉点 A, B, 还剩下 $n-2$ 个点, 这 $n-2$ 个点所形成的凸 4 点组至少有 $f(n-2)$ 个, 其中每个四边形至多恰含有 A, B, C 中的一个点 C, 与前面的 $\binom{n-3}{2}$ 个四边形都互异. 至此, 不等式获证.

【新写】任意 3 点都构成一个三角形, 得到有限个三角形. 取一个面积最大的三角形, 设为 $\triangle ABC$ (如图 1). 作外围三角形 $\triangle A_1B_1C_1$, 使 $\triangle ABC$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线三角形. 由 $\triangle ABC$ 的最大性, 其他的 $n-3$ 个点都被 $\triangle A_1B_1C_1$ 覆盖.

考察 A, B, C 外的 $n-3$ 个点, 对其中任意两点 P, Q, 作直线 PQ, 不妨设直线 PQ 与 A_1B_1, A_1C_1 分别交于点 M, N.

由抽屉原理, 不妨设 B, C 在直线 PQ 的同侧, 则 MN, BC 构成凸四边形, 进而 PQ, BC 构成凸四边形(依次连接凸图形边界上的点形成的图形). 因为在 $n-3$ 个点取 2 个点 P, Q 有 $\binom{n-3}{2}$ 种取法, 所以含有 A, B, C 中两个点的凸四边形至少有 $\binom{n-3}{2}$ 个. 去掉点 A, B, 还剩下 $n-2$ 个点, 这 $n-2$ 个点所形成的凸 4 点组至少有 $f(n-2)$ 个, 这些四边形中的每一个都至多恰含有 A, B, C 中的一个点, 从而与前面的 $\binom{n-3}{2}$ 个四边形互异. 由加法原理, 不等式获证. □

【遗留问题】能否求出 $f(n)$ 的具体解析式? 留给读者思考.