2019 美国 HMMT 2 月赛部分试题评析

杨铮
(上海市上海中学, 200231)
指导教师: 王广廷

2019 年美国哈佛—麻省理工大学数学锦标赛 (HMMT) 二月场于今年 2 月如期举行. 下面是其中部分试题的解与评析, 供读者参考. 其中部分解答参考了官方答案.

I、 个人赛: 代数和数论

题 1. 已知函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(1)>0$ 且对任意自然数 n 均有:

$$\sum_{d|n} f(d)f(\frac{n}{d})=1,$$

求 $f(2018^{2019})$.

解 首先对所有素数 p 和非负整数 α, 求$f(p^\alpha)$.

由题可知, 取 $n=1$ 时, $f(1)^2=1$. 结合 $f(1)>0$ 知 $f(1)=1$.

对每个素数 p, 记 $a_t=f(p^t), t\in\mathbb{N}$, 则 $a_0=1$ 且对任意 $t\in\mathbb{N}$, 有

$$1=\sum_{d|p^t} f(d)f(\frac{p^t}{d})=\sum_{u=0}^{t} f(p^u)f(\frac{p^t}{p^u})=\sum_{u=0}^{t} a_u a_{t-u}.$$

因此考虑母函数

$$g(x)=\sum_{t=0}^{+\infty} a_t x^t,$$

则

$$(g(x))^2=\left(\sum_{t=0}^{+\infty} a_t x^t\right)^2=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\sum_{u=0}^{t} a_u a_{t-u}\right)x^t=\sum_{t=0}^{+\infty} 1\cdot x^t=(1-x)^{-1},$$

由 $a_0=1$ 并结合广义的二项式定理知

修订日期: **2019-05-19.**

$$
\begin{aligned}
g(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{t=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{t}(-1)^t x^t\\
&=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{t}(-\frac{1}{2}-i)}{t!}\right)(-1)^t x^t\\
&=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{(2t-1)!}{2^t t!}\right)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{t}(2i)}{t!\cdot 2^t}\cdot x^t.
\end{aligned}
$$

故对 $t\in\mathbb{N}$, 有$a_t=\frac{1}{2^{2t}}\binom{2t}{t}$. 故

$$
f(p^t)=\frac{1}{2^{2t}}\binom{2t}{t}. \tag{1}
$$

再对 n 进行归纳证明: 若 n 的标准分解为 $n=\prod\limits_{i=1}^{l}p_i^{\alpha_i}$, 则

$$
f(n)=\prod_{i=1}^{l}f\left(p_i^{\alpha_i}\right). \tag{2}
$$

$n=1$ 时 (2) 成立. 若 $n\le n'-1$ ($n'\in\mathbb{N}^*,\ n'\ge 2$) 时成立, 则 $n=n'$ 时, 由归纳假设 (此处 $n=\prod\limits_{i=1}^{l}p_i^{\alpha_i}$ 为 n 的标准分解) 及 $f(1)=1$,

$$
\begin{aligned}
1=&\sum_{d|n}f(d)f(\frac{n}{d})=\prod_{i=1}^{l}\left(\sum_{d|p^{\alpha_i}}f(d)f(\frac{n}{d})\right)=\prod_{i=1}^{l}\left(\sum_{t_i=0}^{\alpha_i}f(p_i^{t_i})f(p_i^{\alpha_i-t_i})\right)\\
=&\sum_{0\le t_1\le\alpha_1,0\le t_2\le\alpha_2,\cdots,0\le t_l\le\alpha_l}\left(\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{t_i})\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{\alpha_i-t_i})\right)\\
=&\sum_{\substack{0\le t_1\le\alpha_1,0\le t_2\le\alpha_2,\cdots,0\le t_l\le\alpha_l,\\(t_1,t_2,\cdots,t_l)\ne(0,0,\cdots,0)\\(t_1,t_2,\cdots,t_l)\ne(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)}}f\left(\prod_{i=1}^{l}p_i^{t_i}\right)f\left(\prod_{i=1}^{l}p_i^{\alpha_i-t_i}\right)+2\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{\alpha_i})\prod_{i=1}^{l}f(1)\\
=&\left(\sum_{d|n,d\ne1,d\ne n}f(d)f(\frac{n}{d})\right)+2\left(\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{\alpha_i})\right)f(1).
\end{aligned}
$$

故有

$$
2f(n)f(1)=2\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{\alpha_i})f(1).
$$

因此

$$
f(n)=\prod_{i=1}^{l}f(p_i^{\alpha_i}),
$$

$n=n'$时 (2) 成立. 故 (2) 证毕!

故由 (1), (2) 知:

$$f(2018^{2019})=f(2^{2019}\cdot 1009^{2019})=f(2^{2019})f(1009^{2019})=\frac{1}{2^{8076}}\binom{4038}{2019}^2.$$

故

$$f(2018^{2019})=\frac{1}{2^{8076}}\binom{4038}{2019}^2. \qquad \square$$

评析 先代几个 n 的值进行尝试或从递推式本身进行观察, 可以猜到或者看出 $f(n)$ 在 $\mathbb{N}^*$ 上的积性, 从而只需对素数 p 或和非负整数 α 来求 $f(p^\alpha)$. 而记 $a_t=f(p^t)$ 则有 $\sum\limits_{t=0}^{m}a_ta_{m-t}=1$, 对 $m\in\mathbb{N}$ 成立, 这让我们想到母函数. 如果一时想不到母函数, 也可以先算几个 a_t 再去猜通项, 最后化为去证对 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{2t}{t}\binom{2(n-t)}{n-t}=4^n.$$

这个组合恒等式应该是熟悉的, 证明方法中较为普遍的是用母函数, 读者有兴趣的可以尝试寻找它的不用母函数的证明.

题 2. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $a_0=3, a_1=4$, 且有

$$a_{n+2}=a_{n+1}a_n+\left\lceil\sqrt{a_{n+1}^2-1}\sqrt{a_n^2-1}\right\rceil$$

对 $n\geq 0$ 成立, 求

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}-\frac{a_{n+2}}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

解 记 $a_{-1}=1$, 下面对 n 进行归纳证明: $n\geq 1$ 时,

$$a_{n+1}=2a_na_{n-1}-a_{n-2}. \tag{1}$$

$n=1$ 时, 由题得

$$a_2=a_0a_1+\left\lceil\sqrt{a_0^2-1}\sqrt{a_1^2-1}\right\rceil=3\times 4+\left\lceil\sqrt{120}\right\rceil=23=2a_1a_0-a_{-1}.$$

则 (1) 成立.

若 $n\leq n'-1$ ($n'\in\mathbb{N}^*, n'\geq 2$) 时 (1) 成立, 则由归纳假设知

$$a_{-1}\leq a_0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{n'}.$$

则

$$\begin{aligned}
&2a_na_{n-1}a_{n-2}+2-a_n^2-a_{n-1}^2-a_{n-2}^2=\left(2a_{-1}a_0a_1+2-a_{-1}^2-a_0^2-a_1^2\right)\\
&+\sum_{i=2}^{n}\left((2a_ia_{i-1}a_{i-2}+2-a_i^2-a_{i-1}^2-a_{i-2}^2)-(2a_{i-1}a_{i-2}a_{i-3}+2-a_{i-1}^2-a_{i-2}^2-a_{i-3}^2)\right)\\
=&2\cdot 1\cdot 3\cdot 4+2-1^2-3^2-4^2+\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_{i-3})(2a_{i-1}a_{i-2}-a_i-a_{i-3})
\end{aligned}$$

$$=0+\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_{i-3})\cdot 0=0.$$

因此 $-a_n^2-a_{n-1}^2=-2a_na_{n-1}a_{n-2}-2+a_{n-2}^2$. 故

$$\begin{aligned}(a_n^2-1)(a_{n-1}^2-1)=&a_n^2a_{n-1}^2-a_n^2-a_{n-1}^2+1\\=&a_n^2a_{n-1}^2-2a_na_{n-1}a_{n-2}-2+a_{n-2}^2+1\\=&(a_na_{n-1}-a_{n-2})^2-1.\end{aligned}$$

易证 $a_na_{n-1}-a_{n-2}>1$. 所以

$$\begin{aligned}a_{n+1}=&a_na_{n-1}+\left\lceil\sqrt{a_n^2-1}\sqrt{a_{n-1}^2-1}\right\rceil\\=&a_na_{n-1}+(a_na_{n-1}-a_{n-2})\\=&2a_na_{n-1}-a_{n-2}.\end{aligned}$$

(1) 在 $n=n'$ 时成立. 因此 (1) 证毕!

因此由 (1) 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}-\frac{a_{n+2}}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2a_{n+1}a_{n+2}-a_n}{a_{n+2}}-\frac{2a_{n+1}a_n-an-1}{a_n}+\frac{n_{n+1}}{a_{n+3}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{a_{n+2}}+2a_{n+1}+\frac{a_{n-1}}{a_n}-2a_{n+1}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{a_{n+2}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\overset{\text{def}}{=}S.\end{aligned}$$

由 (1) 易知 $n\geq 2$ 时 $a_n\geq a_{n-1}a_{n-2}\geq 3a_{n-1}$, 故 $n\geq 3$ 时,

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}\leq\frac{1}{a_{n-2}}=\frac{1}{a_0}\cdot\prod_{i=1}^{n-2}\frac{a_{i-1}}{a_i}\leq\frac{1}{a_0}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{4}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{a_{n+2}}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

绝对收敛. 故

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{a_{n+2}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+2}}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=-\frac{a_0}{a_2}+\frac{a_{-1}}{a_0}=\frac{14}{69}.$$

故所求和为 $\frac{14}{69}$. □

评析 先去算一下 $\{a_n\}$ 的前几项并去猜测递推式就会发现 $(a_n^2-1)(a_{n+1}^2-1)+1$ 是完全平方数和 (1), 之后用韦达跳跃就能将各个猜测证出. 最后计算 S

的值时也要大胆地去想能否用一些简单的变形就能将 S 进行裂项, 同时注意不要算错.

II、 个人赛: 组合

题 3. 对一个正整数 N, 我们将 N 的正因子 (包括 1 和 N) 用四种颜色染色. 一种染色方式称为"好的", 若当 a, b 和 (a, b) 是 N 的不同正因子时, 它们的颜色两两不同. 问: 对于一个不是素数幂的整数, 其好的染色方式至多有多少种?

解 若 N 有三个或三个以上不同素因子, 记为 p, q, r.

下证对 N 没有好的染色方式. 若有, 则由定义, $p, q, r, 1$ 颜色互不相同. 故考虑 pq, r, 和 $1 = \gcd(pq, r)$ 的颜色知 pq, 和$1, r$ 均不同色. 再考虑 n 的正因子

$$pq, rq, q = \gcd(pq, rq)$$

和

$$pq, rq, p = \gcd(pq, rp)$$

知 pq 和 p, q 均不同色. 但 $p, q, r, 1$ 互不同色, 且一共只有四种颜色, 故矛盾!

故对 N 没有好的染色方式.

下设 N 有两个不同的素因子 p, q. 记 $N = p^{\alpha}q^{\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*)$, 并不妨设 $\alpha \geq \beta$.

对 $\alpha_1 < \alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha)$, 考虑 N 的正因子

$$p^{\alpha_2}, qp^{\alpha_1}, p^{\alpha_1} = \gcd(p^{\alpha_2}, qp^{\alpha_1})$$

知 $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, qp^{\alpha_1}$ 两两不同色. (1)

因此所有 p^i $(0 \leq i \leq \alpha)$ 互不同色, 且它们与 q 的颜色也互不相同, 故 $\alpha + 2 \leq 4$, 故 $\alpha \leq 2$.

若 $\beta \geq 2$, 则 $\alpha \geq \beta \geq 2$. 考虑 N 的五个因子 p^2, p, pq, q, q^2, 则其中任两个不同色 (因为考虑 $p^2, pq, p = \gcd(p^2, pq)$ 和 $q^2, pq, q = \gcd(q^2, pq)$ 知 $p^2, p, pq; pq, q, q^2$, 不同色, 而 p, p^2 中任一个和 q, q^2 中任一个的最大公约数都是 1, 因此不同色. 故 p^2, p, pq, q, q^2, 互不同色). 但只有四种颜色, 故对 N 不存在好的染色方式. 故下可设 $\beta = 1$.

此时由 (1) 易证对 N 的全体好的染色方式为: 使 $1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha}$ 颜色互不相同, 且使对每个 i $(0 \leq i \leq \alpha - 1)$ 都有 $p^i q$ 和 $p^i, p^{i+1}, \cdots, p^{\alpha}$ 颜色不同的染色方式.

故 $N = pq$ 时, 对 N 共有 $4 \times 3 \times 2 \times 4 = 96$ 种好的染色方式;

$N = p^2q$ 时, 共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 4 = 192$ 种好的染色方式. 这里计数时

先考虑 $1, p, p^2, \cdots, p^\alpha$ 的颜色, 再考虑 $q, pq, \cdots, p^\alpha q$ 的颜色.

因此答案为 192. □

评析 本题可以先猜出当 N 的素因子或者素因子幂次很大的时候, 没有好的染色方式. 而在讨论的过程中则需要大胆一些. 对于那些偏向于使用几何直观思考问题的人而言, 可以通过将 N 的所有因数排成一个立方体来将问题看的更清晰 (此处易证 N 有不超过 3 个不同素因子, 所以立方体也不超过三维). 本题如果将四种颜色更改为五种或更多的话, 思考的难度和讨论的复杂程度将会大大增加.

题 4. 一只羊在四维空间中行走. 它从原点出发, 每一分钟, 它从位置 (a_1, a_2, a_3, a_4) 走到某个位置 (x_1, x_2, x_3, x_4) 均是整数, 且

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2 = 4,$$

$$|(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)| = 2.$$

若这只羊在 40 分钟后到达 $(10, 10, 10, 10)$. 问: 共有多少种不同的路径?

解 归纳易证该羊每步移动后的位置的四个坐标都是整数. 因此易证它每一步移动过的向量为 $(2, 0, 0, 0), (1, 1, 1, -1)$ 及其负向量和 (在四个维度的坐标上的) 置换.

考虑如下坐标变换: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to$

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\right).$$

则它是 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 的一一映射.

该变换将该羊每一步所走过的向量变为 $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$ (四个正负号任取), 且将起点 $(0, 0, 0, 0)$ 变为 $(0, 0, 0, 0)$, 终点 $(10, 10, 10, 10)$ 变为 $(20, 0, 0, 0)$.

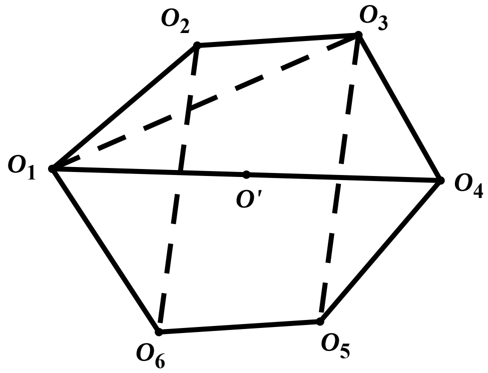
在进行这个坐标变换后, 该羊所在位置的第一, 二, 三, 四个坐标在 40 步内应该分别增加 30, 20, 20, 20 次而减少 10, 20, 20, 20 次, 并可在该前提下随意从 $\{-1, 1\}$ 中选择四个坐标中每一个的变化量. 因此该羊共有 $\binom{40}{10}\binom{40}{20}^3$ 种走法. □

评析 因为本题是在四维上讨论的, 所以一般的几何感觉不能用于处理这道题. 我们只能猜测这只羊移动的方式有一个很好的化简办法. 此时注意到这只羊每步有 16 种走法, 所以可以猜测这些走法是否经过变换后能够得到一个超立方体的 16 个顶点, 而除非观察出原先题目中给出的 16 个方向向量的端点本身构成一个超立方体 (从而找出上面答案中的全等变换), 否则很难找出所想要的

坐标变换. 因此本题实际难度很大.

III、 个人赛: 几何

题 5. 平面上, 六个单位圆盘 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 两两不相交, 且 C_i 与 C_{i+1} 相切 $(1 \le i \le 6)$, 其中 $C_7 = C_1$. 令 C 表示包含这六个圆盘面积最小的圆盘, 设 r 为 C 可能的最小半径, R 是 C 可能的最大半径. 求 $R - r$.



解 先证 $r = 3$.

若存在一个半径小于 3 的圆盘 C 包含 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, 则记 C 的圆心为 O 并记 C_i 的圆心为 O_i $(1 \le i \le 6)$. 以 O 为中心, 作三条直线, 将平面分为六个区域, 其中任两条直线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ (六个区域均含其边界). 此时 $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 中必有两个在同一区域中, 记为 O_{j_1}, O_{j_2}, 则

$$|O_{j_1}O_{j_2}| \ge 2, |OO_{j_1}| < 2, |OO_{j_2}| < 2,$$

且

$$\angle O_{j_1}OO_{j_2} \le \frac{\pi}{3}.$$

由大边对大角知 $\angle O_{j_1}OO_{j_2}$ 是 $\triangle OO_{j_1}O_{j_2}$ 唯一的最大内角, 故 $\angle O_{j_1}OO_{j_2} > \frac{\pi}{3}$, 与 $\angle O_{j_1}OO_{j_2} < \frac{\pi}{3}$ 矛盾! 故 $r \ge 3$.

而当 $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 分别是一个边长为 2 的正六边形顺次的六个顶点时, 取 O 为该六边形中心, 而 C 的半径为 3, 则 C 包含 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. 因此 $r \le 3$, 故 $r = 3$.

再证 $R = 2 + \sqrt{3}$. 仍记 C_i 的圆心为 O_i $(1 \le i \le 6)$ 且 C 的圆心为 O.

取 O_1, O_2, O_4, O_5 分别为边长为 2 的正方形的顺次的四个顶点, 而 O_3, O_6 在 $O_1O_2O_4O_5$ 外且使得 $\triangle O_2O_3O_4$ 和 $\triangle O_5O_6O_1$ 都是边长为 2 的正三角形, 则 $|O_3O_6| = 2 + 2\sqrt{3}$. 从而可以取出 C_3, C_6 上各一个点 A, B, 使得

$$|AB| = 4 + 2\sqrt{3}.$$

因此 C 内 (或边界上) 两个点 A, B 使得 $|AB| = 4+2\sqrt{3}$. 故

$$2R \geq |AB| = 4+2\sqrt{3},$$

即 $R \geq 2+\sqrt{3}$.

下证 $R \leq 2+\sqrt{3}$. 为此只需对每种 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 可能的位置找一个半径为 $(2+\sqrt{3})$ 的圆盘 C' 包含 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. 直接取 C' 以 C_1C_4 中点 O' 为圆心, $(2+\sqrt{3})$ 为半径. 则只需证明

$$|O'O_i| \leq 1+\sqrt{3}\,(i=1,2,\cdots,6).$$

下只需证

$$|O_1O'| \leq 1+\sqrt{3}, |O_2O'| \leq 1+\sqrt{3}.$$

其余类似可证.

取 O_1O_3 中点 D. 由 $|O_1O_2| = |O_2O_3| = 2$ 及 $|O_1O_3| \geq 2$ 知 $O_2D \perp O_1O_3$, 故

$$|O_2D| = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1D^2} \leq \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}.$$

又可得 $O'D$ 是 $\triangle O_1O_3O_4$ 平行于 O_3O_4 的中位线, 从而

$$|O'D| = \frac{1}{2}|O_3O_4| = 1.$$

故

$$|O'O_2| \leq |O'D| + |DO_2| \leq 1+\sqrt{3}.$$

又取 O_2O_5 中点 O'', O_2O_6 中点 E, O_3O_5 的中点 F, 则同理

$$|O_1E| \leq \sqrt{3},\ |O_4F| \leq \sqrt{3},\quad |O''E| = |O''F| = 1.$$

因此

$$|O_1O'| = \frac{1}{2}|O_1O_4| \leq \frac{1}{2}\left(|O_1E| + |EO''| + |O''F| + |FO_4|\right) \leq 1+\sqrt{3}.$$

类似可证 $|O'O_i| \leq 1+\sqrt{3}\,(i=1,2,\cdots,6)$. 因此已得出 $R \leq 2+\sqrt{3}$. 故

$$R = 2+\sqrt{3}.$$

故

$$R - r = (2+\sqrt{3}) - 3 = \sqrt{3}-1. \qquad \square$$

评析 本题最难的部分之一在于猜答案. 将 R 与 r 的值猜出后 $r=3$ 是容易证出的, 不用最大角也可以用余弦定理或几何直观得出 $\angle O_{j_1}OO_{j_2}$ 有关的矛盾. 而 $2+\sqrt{3}$ 则要难一些. 在相信 $R=2+\sqrt{3}$ 并相信直接取 O_1O_4 中点为 C 的圆心就可以时, 是通过仔细分析题目条件 (具体是在确定 $|O_1O_3|$ 时让 $|O_2O'|$ 最大)

后能放出答案中所述的三角不等式, 也可以通过投影 (而不是巧妙地放三角不等式) 得出 $|O_1O_4| \le 2+2\sqrt{3}$. 但是在没有对 O 的位置和 R 的大小有坚定的信念的情况下很难想到去放出这个三角不等式. 因此本题也很有难度.

IV、 团体赛

题 6. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 证明:

$$0<\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta-\sec\theta-\csc\theta<1.$$

证明一 记 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta-\sec\theta-\csc\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$. 则

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=\cos\theta-\sin\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\\
&=(\cos\theta-\sin\theta)\left(1-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\\
&=(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{-(\cos\theta+\sin\theta)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)^2\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+1\right)\\
&=(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{(\cos\theta+\sin\theta-1)^2}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}+1\right),
\end{aligned}$$

故 $f'(\theta)$ 与 $(\cos\theta-\sin\theta)$ 符号相同. 因此

$$f'(\theta)=\begin{cases}>0, & (0<\theta<\frac{\pi}{4})\\ =0, & (\theta=\frac{\pi}{4})\\ <0, & (\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

故对 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 有

$$f(\theta)\le f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1-\sqrt{2}-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}<1.$$

证毕! □

证明二 记 $X_1(\cos\theta,0), Y_1(0,\sin\theta), O(0,0), X_2(\sec\theta,0), Y_2(0,\csc\theta)$, 则

$$|X_1Y_1|=1,\ \ |X_1X_2|=\sec\theta-\cos\theta,\ \ |Y_1Y_2|=\csc\theta-\sin\theta.$$

且

$$|X_2Y_2|=\sqrt{\sec^2\theta+\csc^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\tan\theta+\cot\theta.$$

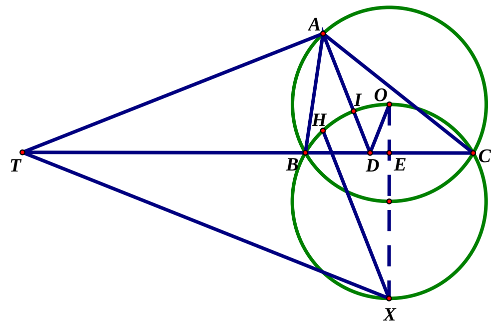
因此

$$\begin{aligned}&\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\cot\theta-\sec\theta-\csc\theta\\ =&-|Y_1Y_2|-|X_1X_2|+|X_2Y_2|\le|X_1Y_1|=1.\end{aligned}$$

因为 X_1,Y_1,X_2,Y_2 不共线, 所以上式等号不成立. 证毕! □

评析 证明一是常规的做法. 而证明二则是在标准答案 (记 $Z(\cos\theta, \sin\theta)$, 并作 Z 在 x 轴, y 轴上的投影 X_1, Y_1, 再过 Z_1 作单位圆的切线交 x 轴, y 轴分别于 X_2, Y_2, 并按证法二使用三角不等式) 的基础上整理得到.

题 7. 不等边三角形 ABC 满足 $\angle A = 60°$. 点 O, H, I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心, 垂心, 内心. 点 D 是直线 BC 与 $\angle A$ 的内角平分线的交点, 点 X 在 $\triangle IHO$ 的外接圆上, T 是直线 BC 与 $\angle A$ 邻补角角平分线的交点, 且满足 $HX \parallel AI$. 证明: $OD \perp TX$.



证明 下只说明 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的情况. 其余情况类似可证.

由题易证

$$\angle BHC = \pi - \angle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

$$\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

$$\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

故 B, H, I, O, C 共圆.

由熟知的结论知 IB 平分 $\angle OBH$, 故 $HI = IO$. 又易知 AI 与 $\odot(ABC)$ 的另一交点为 $\odot(BIC)$ 的圆心. 结合 $HI = IO$ 及垂径定理知 $AI \perp OH$. 故由 $AI \parallel HX$ 知 $HX \perp OH$. 故 OX 是 $\odot(BHIOC)$ 的直径. 故由 $BO = OC$ 知

$$OX \perp BC.$$

记 OX 交 BC 于 E, 则 E 为 BC 的中点, 由 AB, AC, AD, AT 构成调和线束知 B, C, D, T 构成调和点列. 因此由调和点列的性质知

$$ED \cdot ET = EB^2 = EB \cdot EC = EO \cdot EX.$$

故 $\frac{ED}{EO} = \frac{EX}{ET}$. 结合 $\angle OED = \angle TEX = \frac{\pi}{2}$ 知

$$\triangle DEO \sim \triangle XET.$$

故

$$\angle DOX+\angle OXT=\angle DOE+\angle EXT=\angle DOE+\angle EDO=\frac{\pi}{2}.$$

故 $OD\perp TX$. 证毕! $\square$

评析 熟知 (当 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$), B,H,I,O,C 共圆, 且 $AI\perp OH$, 且画图可猜到 X,O 是 $\odot(BOC)$ 的一对对径点, 因此题中结论 $OD\perp TX$ 可以转化为相对容易处理的对象 (如直线 BC, 点 D,T 在 BC 的位置关系) 更接近的命题"D 是 $\triangle OTX$"的垂心, 此时它又能转化为 $EO\cdot EX=ED\cdot ET$. 即 $EB^2=ED\cdot ET$, 而这是 B,C,D,T 构成调和点列的推论.

题 8. 令 $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$ 表示正整数集, f 是 $\mathbb{N}^*$ 到 $\mathbb{N}^*$ 的双射, 是否存在正整数 n, 使得 $(f(1),f(2),\cdots,f(n))$ 是 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的一个排列?

解 不一定存在.

取 $T=\left\{2^{2^i}|i\in\mathbb{N}^*\right\}$, $U=\mathbb{N}^*\setminus T$. 对 $i\in\mathbb{N}^*$, 记 a_i 为 U 中第 i 小的数. 取 f 如下:

$$f\left(a_i\right)=2^{2^i},\ \ f\left(2^{2^i}\right)=a_i,\ i\in\mathbb{N}^*.$$

则由 $T=\left\{2^{2^i}|i\in\mathbb{N}^*\right\}$, $U=\{a_i|i\in\mathbb{N}^*\}$ 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个划分知 f 是 $\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 的一个双射, 且

$$\{f(u)\mid u\in U\}=T,\ \{f(t)\mid t\in T\}=U.$$

故若存在 $n\in\mathbb{N}^*$ 使 $(f(1),f(2),\cdots,f(n))$ 是 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的一个排列, 则记 $[n]=\{1,2,3,\cdots,n\}$, 则

$$\{f(u)|u\in U\cap[n]\}=T\cap[n],\ \ \{f(t)|t\in T\cap[n]\}=U\cap[n].$$

因此 $|T\cap[n]|=|U\cap[n]|$. 所以

$$|T\cap[n]|=\frac{n}{2}.$$

故

$$2^{2^{\frac{n}{2}}}=\max_{t\in T\cap[n]}\{t\}\le n.$$

这不可能. 故不一定存在这样的 n. $\square$

评析 上述做法应该来说已经成为一种套路了. 对处理这种看似苛刻的限制时, 利用无限集可以充分向外延伸这一特点, 构造映射往往有神奇的效果. 通常的处理方式是对每个 n, 在充分远处找一个数 m, 使得 $f(n)=m$, 再从的"更

远”的地方找一个数 m_2, 使得 $f(m_2)=n$. 因为对无穷集合, 在每个“更远”之外还有更远的地方, 所以不会产生矛盾. 类似的题有今年中国 TST 二阶段第一天的第 3 题和“ 找出一个集合 $A\subset\mathbb{Z}$ 使每个 $m\in\mathbb{Z}$ 都有唯一一对 $a_m,b_m\in A$ 使 $m=2a_m+3b_m$”. 另外, 官方答案中给出的映射 f 是:

$$f(n)=\begin{cases}2n, & n=1,2\\ n+3, & n\geq 3,\ 2\nmid n\\ n-3, & n\leq 4, 2\mid n\end{cases}$$

题 9. 一个平面上的凸多边形叫做宽的, 如果它在任意直线上的投影的长度均不小于 1. 证明: 任一宽的凸多边形都包含一个半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆.

证明一 对每个宽的多边形 A. 考虑该多边形内含的圆中最大的一个, 记为 ω (容易证明所有 A 内含的圆的半径构成的集合是闭集, 因此它有最大元). ω 必与 T 的三条边相切.

记 T 的所有与 ω 相切的边与 ω 的切点的集合为 B. 若 B 中任三点构成钝角三角形, 则任取 B 中一点 b 并作 ω 的过 b 的直径, 对 B 在该直径两侧的点中到 b 的距离最远的点 (共 2 个) 讨论可知必有一条直径 l 使 b 和这两个点在 l 的同侧 (且不在 l 上). 此时可知 B 中所有点都在 l 的该侧 (且不在 l 上).

因此将 ω 的圆心向 l 的另一侧稍作移动 (移动方向与 l 垂直) 则可将 ω 的半径稍作增加, 而保证 ω 内含于 A, 与 ω 半径最大性矛盾!

故 B 中有三点 a,b,c 构成非钝角三角形.

记 T 与 ω 切于 a,b,c 的边分别为 l_a,l_b,l_c, 则若 a,b,c 中有两个点是 ω 的对径点, 则记为 x,y, 则 A 包含于 l_x,l_y 所在直线之间的带状区域中 (此处 $l_x\parallel l_y$).

因此 A 在垂直于 l_x 的直线上投影的长度为 ω 的半径的两倍, 故 ω 的半径不小于 $\frac{1}{2}$. 若 a,b,c 没有两个点是 ω 的对径点, 则 l_a,l_b,l_c 围成三角形 C, 且 ω 是 C 的内切圆, 且 T 内含于 C. 而记 ω 的半径为 r, C 的三边长分别为 a,b,c, 面积为 S, 则 T 在垂直于 C 三边的直线上的投影的长度分别不大于 $\frac{2S}{a},\frac{2S}{b},\frac{2S}{c}$. 故

$$\frac{2S}{a}\geq 1,\frac{2S}{b}\geq 1,\frac{2S}{c}\geq 1.$$

而注意到 $2S=r(a+b+c)$, 因此

$$\begin{aligned}r=&\frac{1}{\frac{1}{r}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)}\\=&\frac{1}{\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}}\geq\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

因此 ω 的半径不小于 $\frac{1}{3}$, 证毕! $\square$

证明二 对每个宽的多边形 A, 取 A 的重心 G_A. 下证以 G_A 为圆心的, $\frac{1}{3}$ 为半径的圆包含于 A.

若否, 则存在 A 的边界上一点 P 使得 $|G_AP| \le \frac{1}{3}$. 过 P 作直线 l_1, 使 A 在 l_1 的某侧. 再过 G_A 作 $l_2 \parallel l_1$ 交 A 于两点 B, C. 再作另一条平行于 l_1 的与 A 的边界接触的直线 l_3, 使 A 在 l_3 的某侧 (其中 $l_3 \neq l_1$).

记 l_3 与 A 的边界的一个公共点为 D, DB 与 DC 分别交 l 于 E, F, 则 $\triangle DEF$ 比 A 多了 l_1, l_2 间的几块区域, 且比 A 少了 l_2, l_3 间的几块区域.

因此 $\triangle DEF$ 的重心 G 比 G_A 到 l_1 的距离更短, 故 G_A 到 l_1 的距离小于 $\frac{1}{3}$, 而 D 到 l_1 (即 EF) 的距离为 G 到 l_1 的距离的三倍.

因此 l_3 到 l_1 (即 D 到 l_1) 的距离小于 1. 故 A 在垂直于 l_1 的直线上的投影长度小于 1, 与 A 是宽的矛盾!

故以 G_A 为圆心的, $\frac{1}{3}$ 为半径的圆包含于 A. 证毕! □

评析 这两个证明都整理自标准答案. 它们一个是去证明有一点 P 到 C 的所有边距离不大于 $\frac{1}{3}$. 另一个是稍稍加强了一些, 去证有一点在每条夹住多边形的"带子"中间 $\frac{1}{3}$ 的地方. (其中"带子"指两条直线之间的带状区域). 而这两件事情都可以用海莱定理进行证明, 有兴趣的读者可以自己进行尝试, 而标准答案比用海莱定理的叙述简单.

本题供题人是 2015 年 CMO 第一名, 2016 年 IMO 金牌张盛桐.

题 10. 证明: 对任意正整数 n, 多项式 $P(x) = (2n)x^{2n} + (2n-1)x^{2n-1} + \cdots + (n+1)x^{n+1} + nx^n + (n+1)x^{n-1} + \cdots + (2n-1)x + (2n)$ 的所有复根的模长为 1.

证明 易证 0 和 1 都不是 $P(x)$ 的根, 故

$$\begin{aligned}P(x) =&(2n+1)\left(\sum_{i=0}^{2n} x^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)x^i + \sum_{i=n+1}^{2n}(2n+1-i)x^i\right)\\ =&(2n+1)\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} - \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)^2\\ =&(2n+1)\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} - \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}P(x) = 0 \Leftrightarrow&\ (2n+1)\left(\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}\right)\\ \Leftrightarrow&\ (2n+1)\left(x^{2n+1}-1\right)(x-1) = (x^{n+1}-1)^2.\end{aligned}$$

下证 $P(x)$ 有 $(2n)$ 个根在单位圆上 (这样 $P(x)$ 的根都在单位圆上). 则只需在单位圆上找出 $(2n)$ 个不为 1 的满足

$$(2n+1)(x^{2n+1}-1)(x-1)=(x^{n+1}-1)^2$$

的满足 $(2n)$ 个复数.

注意到 x 在单位圆上且 $x\neq 1$ 时: 记 $x=\cos\theta+i\sin\theta$, 则

$$x-1=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

$$x^{n+1}-1=2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\left(-\sin\frac{(n+1)\theta}{2}+i\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\right),$$

$$x^{2n+1}-1=2\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\left(-\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}+i\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}(x-1)(x^{2n+1}-1)=&2\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot 2\sin\frac{(2n+i)\theta}{2}e^{i\left(\frac{(2n+i)\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\\ =&4\sin\frac{\theta}{2}2\sin\frac{(2n+i)\theta}{2}e^{i((n+1)\theta+\pi)},\\ (x^{n+1}-1)^2=&\left(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)^2\\ =&4\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}e^{i((n+1)\theta+\pi)}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&(2n+1)(x-1)(x^{2n+1}-1)=(x^{n+1}-1)^2\\ \Leftrightarrow\ &(2n+1)\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}=\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}\\ \Leftrightarrow\ &(2n+1)\left(\frac{1}{2}\left(\cos(n\theta)-\cos(n+1)\theta\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(n+1)\theta\right)\\ \Leftrightarrow\ &2n\cos(n+1)\theta+1-(2n+1)\cos n\theta=0.\end{aligned}$$

记

$$f(\theta)=2n\cos(n+1)\theta+1-(2n+1)\cos n\theta,\ \theta\in[0,2\pi].$$

则只需证明 $f(\theta)=0$ 在 $(0,2\pi)$ 中有不少于 $(2n)$ 个根 θ. 注意到 $f(\theta)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 而对奇数 i $(1\le i\le 2n-1)$, 有

$$f\left(\frac{i\pi}{n}\right)=2n\cos\frac{i(n+1)\pi}{n}+1+(2n+1)>0;$$

对偶数 i $(2\le i\le 2n-2)$, 有

$$f\left(\frac{i\pi}{n}\right)=2n\cos\frac{i(n+1)\pi}{n}+1-(2n+1)<0.$$

(若 $f\left(\frac{i\pi}{n}\right)=0$, 则 $\cos\frac{i(n+1)\pi}{n}=1$. 故 $2n \mid i(n+1)$. 故 $n|i$. 结合 $2\le i\le 2n-2$ 知 $i=n$. 故 $2\mid n+1$, 这与 $2\mid i$ 矛盾!) 且

$$\cos\frac{\pi}{2(n+1)}=1-(2n+1)\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}=1-(2n+1)\sin\frac{\pi}{2(n+1)}<0.$$

这是因为记

$$g(x)=\frac{2}{\pi}x-\sin x,\ (0\le x\le\frac{\pi}{2}),$$

则 $g'(x)=\frac{2}{\pi}-\cos x$, 故

$$g'(x)\begin{cases}>0, & \arccos\frac{2}{\pi}<x\le\frac{\pi}{2}\\ =0, & x=\arccos\frac{2}{\pi}\\ <0, & 0\le x<\arccos\frac{2}{\pi}.\end{cases}$$

结合 $g\left(\frac{2}{\pi}\right)=g(0)=0$ 知

$$g(x)\le 0\ (0\le x\le\frac{\pi}{2}).$$

故由 $g\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\le 0$ 知

$$\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\ge\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n+1}.$$

故

$$1-(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}<0,$$

及

$$f\left(\frac{(4n+1)\pi}{2(n+1)}\right)=f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)<0.$$

结合

$$\frac{\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}<\cdots<\frac{(2n-1)\pi}{n}<\frac{(4n+1)\pi}{2(n+1)}$$

和连续函数的介值原理知 $f(\theta)=0$ 在 $\left(\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{n}\right)$, $\left(\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n}\right)$, $\cdots$, $\left(\frac{(2n-1)\pi}{n},\frac{(4n+1)\pi}{2(n+1)}\right)$ 中的每个区间中都有根.

因此 $f(\theta)=0$ 有不少于 $(2n)$ 个在 $(0,2\pi)$ 上的根 θ.

故原题证毕! □

评析 在对 P 进行代数变形后不容易直接证出原题结论, 此时需要有灵活的思维 (即"脑洞大开"), 想到直接找出 P 的 $(2n)$ 个根, 这是利用单位圆的几何性质将问题转化为找出一个 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数

$$f(\theta)=2n\cos(n+1)\theta+1-(2n+1)\cos n\theta$$

的一些零点, 考虑图像知此时使用介值原理会更为方便. 官方答案是先证明

$$Q(x)=\frac{P(x)}{x^n}=\frac{2n}{x^n}\cdot\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}-\frac{x}{x^n}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2$$

在单位圆上值为实数, 再证明 $Q(x)$ 在 $(2n)$ 个 $(2n)$ 次单位根上取值正负交替, 巧妙地避开了对 $f(\theta)$ 在 $\theta=0$ 附近取值的讨论, 并叙述得更简洁.

V、 附加赛

题 11. 鲍勃将 $\{(x,y)|1\le x,y\le 5\}$ 中的五个点染成蓝色. 求可能染色方式的数目, 使得任两个蓝色点间的距离不是整数.

解 注意到这样的染色法中任两个不同蓝点不能再同一行或着同一列中. 因此下面考虑所有使每行每列各有一个蓝点的染色方法. 记所有这样的染色方法构成的集合为 A. 则 $|A|=120$. 记 $T=\{(1,1),(1,5),(5,1),(5,5)\}$. 对 $t\in T$, 恰有两个其它 $\{(x,y)|1\le x,y\le 5\}$ 中的格点到它的距离为 5, 记为 t_1,t_2.

对 $t\in T,i\in\{1,2\}$, 记 $A_{t,i}=\{a|a\in A,$ 在 a 中 t 和 t_i 都是蓝色的$\}$. 容易证明全体符合原题条件的染法构成的集合为

$$B:=A\setminus\left(\bigcup_{t\in T,i\in\{1,2\}}A_{t,i}\right),\ \ i\in\{1,2\}.$$

且对 $t\in T$, 有 $|A_{t,i}|=3!=6,\ |A_{t,1}\cap A_{t,2}|=2!=2$.

对 $t_1,t_2\in T,i_1,i_2\in\{1,2\}$. 若 $t_1\ne t_2$, 则 $A_{t_1,i_1}\cap A_{t_2,i_2}=\emptyset$.

故由容斥原理, 记 $S=\{A_{t,i}|t\in T,i\in 1,2\}$, 则

$$\begin{aligned}|B|&=|A|+\sum_{c\subseteq S,C\ne\emptyset}(-1)^{|C|}|\cap_{A'\in c}A'|\\&=|A|+(-1)\cdot\sum_{t\in T,i\in\{1,2\}}|A_{t,i}|+1\cdot\sum_{t\in T}|A_{t,1}\cap A_{t,2}|\\&=120-8\cdot 6+4\cdot 2=80.\end{aligned}$$

故所求答案为 80. □

评析 本题需要注意的主要有:讨论时不要漏情况和计算时不要算错.

题 12. 求最小的正整数 n, 使得

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\text{个}2}>\underbrace{((\cdots((100!)!)!\cdots)!)!}_{100\text{个阶乘}}.$$

解 所求最小的正整数 n 为 104.

对 $n \in \mathbb{N}$, 记 $a_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n个2}, b_n = \underbrace{((\cdots((100!)!)!\cdots)!)!}_{n个阶乘}$, 则 $a_0 = 1, b_0 = 100$, 且对 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$a_{n+1} = 2^{a_n}, b_{n+1} = b_n!.$$

则易证 $n \geq 2$ 时,

$$a_n \geq 4, a_n = 2^{a_{n-1}} \geq a_{n-1}^2, b_n \geq 100.$$

下面对 n 归纳证明

$$a_{n+3} < b_n < \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}}.$$

$n = 0$ 时成立.

若 $n \leq n'$ 成立 $(n' \in \mathbb{N})$, 则 $n = n' + 1$ 时, 由归纳假设,

$$a_{n+3} = 2^{a_{n+2}} = \prod_{i=1}^{a_{n+2}} 2 \leq \prod_{i=1}^{a_{n+2}} i < \prod_{i=1}^{b_{n-1}} i = b_{n-1}! = b_n.$$

$$\begin{aligned} b_n = b_{n-1}! < \left(\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\right)! < \left(\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\right)^{\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}} \\ = \left(2^{a_{n+2}-a_{n+1}}\right)^{\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}} = 2^{a_{n+3}-\frac{a_{n+1}a_{n+3}}{a_{n+2}}} \\ < 2^{a_{n+3}-\frac{a_{n+2}^2}{a_{n+2}}} = \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}}. \end{aligned}$$

故 $n = n' + 1$ 时也成立. 因此由数学归纳法知对 $n \in \mathbb{N}$ 均有

$$a_{n+3} < b_n < \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}} < a_{n+4}.$$

因此所求最小的正整数 n 为 104. 因为

$$a_{103} = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{103个2} < \underbrace{((\cdots((100!)!)!\cdots)!)!}_{100个阶乘} = b_{100} < \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{104个2}. \qquad \square$$

评析 可以猜测 $a_{n+3} < b_n < a_{n+4}$ $(n \in \mathbb{N})$, 且也可以感觉出用归纳法从 n 证到 $n+1$ 时, 将 b_{n+1} 的下界放成 2^{b_n}, 上界放成 $b_n^{b_n}$. 这时就可以考虑加强 b_n 的上界, 因此只要通过稍微加强就能通过用 $b_n^{b_n}$ 这一归纳步骤将对 b_{n+1} 的上界加强很多, 就能顺利的完成归纳的步骤. 官方的步骤是直接归纳证明 $a_{n+3} < b_n < \sqrt{a_{n+4}}$.

题 13. 复数 a, b, c 构成复平面上一个边长为 18 的等边三角形, 若 $|a+b+c| = 36$. 求 $|bc + ca + ab|$.

解 记

$$\frac{a+b+c}{3} = \alpha, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

为三次单位根, 则由题

$$|\alpha|=\frac{1}{3}|a+b+c|=12.$$

且可不妨设存在模长为 $6\sqrt{3}$ 的复数 β 使得

$$a=\alpha+\beta\omega, b=\alpha+\beta\omega^2, c=\alpha+\beta.$$

因此

$$\begin{aligned}
&|bc+ca+ab|=|(\alpha+\beta\omega^2)(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\omega)+(\alpha+\beta\omega)(\alpha+\beta\omega^2)|\\
=&|(\alpha^2+\alpha\beta(1+\omega^2)+\beta^2\omega^2)+(\alpha^2+\alpha\beta(\omega+1)+\beta^2\omega)+\alpha^2+\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\beta^2|\\
=&|3\alpha^2|=3|\alpha|^2=3\cdot 12^2=432.
\end{aligned}$$

□

评析 $|bc+ca+ab|$ 其实和等边三角形的边长没有关系. 本题的关键在于不要算错.

题 14. 对两个互素的正整数 a, b, 令 $\operatorname{ord}_b(a)$ 表示最小的正整数 k, 使得 $b \mid a^k-1$. 令 $\varphi(a)$ 表示小于或等于 a 的正整数中与 a 互素的个数. 求最小的正整数 n, 使得 $\operatorname{ord}_n(m)<\frac{\varphi(m)}{10}$ 对所有与 n 互素的正整数 m 成立.

解 对素数 p 和正整数 α, 定义

$$\lambda(p^\alpha)=\begin{cases} p^{\alpha-1}(p-1)=\varphi(p^\alpha), & p\neq 2,\\ 2^{\alpha-1}=\varphi(2^\alpha), & p=2 \text{ 且 } \alpha\leq 2,\\ 2^{\alpha-2}=\frac{1}{2}\varphi(2^\alpha), & p=2 \text{ 且 } \alpha\geq 3.\end{cases}$$

则由欧拉定理及原根的性质可知

(1) 对 $m\in\mathbb{Z}$ $(p\nmid m)$, 有 $m^{\lambda(p^\alpha)}\equiv 1(\bmod p^\alpha)$;

(2) 存在 $g_p\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\operatorname{ord}_{p^\alpha}(g_p)=\lambda(p^\alpha)$.

再定义

$$\lambda(n)=\operatorname{lcm}\left(\lambda(p_1^{\alpha_1}),\lambda(p_2^{\alpha_2}),\cdots,\lambda(p_t^{\alpha_t})\right),$$

其中 $n=\prod\limits_{i=1}^{t}\lambda(p_i^{\alpha_i})$ 是 n 的标准分解, 则考虑数 $g_n\in\mathbb{N}^*$ (对 $1\leq i\leq t$ 有 $g_n\equiv g_{p_i^{\alpha_i}}(\bmod p_i^{\alpha_i})$), 可知 $\operatorname{ord}_n(g_n)=\lambda(n)$. 因此易证

$$\max_{\substack{m\in\mathbb{N}^*\\ \gcd(m,n)=1}}\{\operatorname{ord}_n(m)\}=\lambda(n),$$

故即求最小的正整数 n, 使 $\lambda(n)<\frac{\varphi(n)}{10}$. 易证 $\lambda(n)\mid\varphi(n)$, 且

$$\lambda(240)=4<\frac{64}{10}=\frac{\varphi(240)}{10}.$$

下证若 $\lambda(n) < \frac{\varphi(n)}{10}$, 则 $n \geq 240$.

(i) 存在素数 $p \neq 2$, 使 $p \mid \frac{\varphi(n)}{\lambda(n)}$, 则必存在 $p_1^{\alpha_1}, \cdots, p_t^{\alpha_t}$ 中的两个 (记为 n_1, n_2), 使得 $\varphi(n_1), \varphi(n_2)$ 必被 p 整除 (此处 $n = \prod_{i=1}^{t} \lambda(p_i^{\alpha_i})$ 是 n 的标准分解). 此时 n_1, n_2 要么被 p^2 整除, 要么被模 p 与 1 同余的素数整除, 且 $\gcd(n_1, n_2) = 1$, $n_1 n_2 | n$. 因此

$$n \geq \min\left(p^2(2p+1), (2p+1)(4p+1)\right),$$

因为模 p 与 1 同余的最小的两个素数至少为 $(2p+1)$ 和 $(4p+1)$.

若 $p \geq 5$, 则易证 n 必须大于 240, 故 $p = 3$. 这意味着 $7, 9, 13, 19, 31, 37$ 中的两个数被 n 整除. 由 $7 \times 37 > 240$ 知我们可以前述序列中去掉大于 31 的素数. 在剩下的可能性中, 由 $\lambda(9) = \lambda(7) = 6$, $\lambda(19) = 18$, $\lambda(31) = 30$ 易证, 若 n 为 $9, 7, 13, 19, 31$ 中两个数的乘积, 则

$$\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)} \leq 6.$$

又因为 $2 \nmid n$ 时,

$$\varphi(2n) = \varphi(n), \lambda(2n) = \lambda(n),$$

所以由 $\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)} > 10$ 知 n 为一个不小于 3 的数乘以 $9, 7, 13, 19, 31$ 中其中两个数.

当 $n < 240$ 时, n 只能为 $3 \times 9 \times 7 = 189$, 但容易验证 $\frac{\varphi(189)}{\lambda(189)} = 4 < 10$. 矛盾!

(ii) $\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)}$ 为 2 的幂.

易证 $n \nmid 24$ 时, $\lambda(n) \geq 4$, 而 $n \mid 24$ 时, $\varphi(n) \leq 8$. 因此当 $n \mid 24$ 时,

$$\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)} < 10.$$

故 $n \nmid 24$, 此时 $\lambda(n) \geq 4$, 当 $\lambda(n) = 4$ 时 $\varphi(n) \geq 4 \cdot 2^4 = 64$ 且 $32 \nmid n$ (否则 $\lambda(n) \geq \lambda(32) = 8$). 这样的唯一正整数 n 为 $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

不难证明 $\lambda(n) \geq 5$ 时为使

$$\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)} \geq 2^4,$$

n 不可能不大于 240 (否则 $\lambda(n) \leq 15$, 由此 n 不被任何不小于 17 且不为 32 的素数或素数幂整除, 故 n 是 2,4,8,16,32,3,9,5,7,11,13 中一些数的乘积, 此时容易验证 $n \geq 240$).

综上所求的最小正整数 n 为 240. □

评析 上述解答选自官方解答, 对 $\frac{\varphi(n)}{\lambda(n)}$ 的值的讨论在该解答中较为简洁和巧妙. 若 10 改为更大的数, 恐怕就没有那么简洁的做法了.