2019 年 USAMO 试题解答与评析

谢柏庭　潘至璇

(浙江省乐清知临中学, 325600)

指导教师: 羊明亮

2019 年美国数学奥林匹克于 4 月 18,19 日两天进行, 其试题题面新颖, 解答思路具有代表性. 下面我们整理了试题的解答并加以短评, 以供读者参考.

题 1. 函数 $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$ 满足: 对所有正整数 n 都有

$$\underbrace{f(f(\cdots f(n)\cdots))}_{f(n)\text{ 个 } f}=\frac{n^2}{f(f(n))}.$$

求 $f(1000)$ 的所有可能值.

解 所求为全体正偶数.

一方面, 对给定的正偶数 $2k, k\in\mathbb{N}^*$, 取

$$\begin{cases} f(1000)=2k, \\ f(2k)=1000, \\ f(n)=n,\ \ n\neq 2k,1000. \end{cases}$$

容易验证 f 满足要求. 故 $f(1000)$ 可取到任一正偶数.

另一方面, 我们证明 $f(1000)$ 不能为正奇数. 我们以 $f^{(t)}$ 表示 f 的 t 次迭代, $t\in\mathbb{N}^+$.

下面我们证明 f 为单射. $(*)$

对于正整数 $m,l\in\mathbb{N}^+$, 若 $f(m)=f(l)$, 在原式中令 $n=m,l$ 知

$$\begin{aligned} m^2&=f^{(f(m))}(m)\cdot f^{(2)}(m) \\ &=f^{(f(m)-1)}(f(m))\cdot f^{(2)}(m) \\ &=f^{(f(l)-1)}(f(l))\cdot f^{(2)}(l) \\ &=f^{(f(l))}(l)\cdot f^{(2)}(l) \end{aligned}$$

修订日期: **2019-06-10.**

$$= l^2.$$

结合 $m, l \in \mathbb{N}^+$ 知 $m = l$. 故 f 为单射.

因此为证 $f(1000)$ 不为正奇数, 只需证明对 $2 \nmid m$, 有

$$f(m) = m. \tag{※}$$

下面对 m 归纳证明该命题.

$m = 1$ 时, 原式中令 $n = 1$, 有

$$f^{(2)}(1) \cdot f^{(f(1))}(1) = 1.$$

结合 $f^{(2)}(1),\ f^{(f(1))}(1) \in \mathbb{N}^+$ 知

$$f^{(2)}(1) = f^{(f(1))}(1) = 1.$$

在原式中令 $n = f(1)$ 知

$$f^{(2)}(f(1)) \cdot f(f(1)) = f^2(1).$$

这里用到了 $f(f(1)) = 1$.

故 $f^2(1) = f(1)$. 结合 $f(1) \in \mathbb{N}^+$ 知 $f(1) = 1, m = 1$ 时命题成立!

设 m 为小于 $2k+1$ 的正奇数时结论成立 $(k \in \mathbb{N}^+)$.

当 $m = 2k+1$ 时, 在原式中令 $n = m$ 知

$$f^{(2)}(m) \cdot f^{(f(m))}(m) = m^2.$$

而由归纳假设及 $(*)$ 知 $f^{(2)}(m), f^{(f(m))}(m)$ 均不为小于 m 的奇数. 又 $2 \nmid m$, 故

$$f^{(2)}(m) = f^{(f(m))}(m) = m.$$

在原式中令 $n = f(m)$, 结合 $2 \nmid m,\ f(f(m)) = m$ 知

$$f^2(m) = f^{(2)}(m) \cdot f^{(m)}(f(m)) = f(m) \cdot m.$$

故 $f(m) = m,\ m = 2k+1$ 时结论成立!

归纳即知 (※) 成立, 有 $f(1000)$ 不为正奇数.

综合两方面知所求为全体正偶数. □

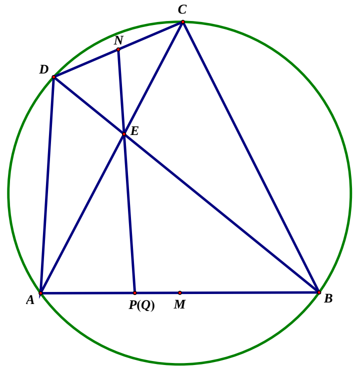
评析 数论型函数方程中的归纳法一般有两种:

(1) 一般的对 n 进行归纳;

(2) 对 n 不同素因子归纳.

一般用 (2) 的情况更多, 这体现数论中“积性”的好处. 但需要注意的是, 归纳法只需找到一个可递降的量即可. 因此切记具体条件分析, 特别地小心“大小”的条件. 例如: 对于素数 $p, p-1$ 的素因子均小于 p, 这可能也是“递降”的途径.

题 2. 设圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AD^2+BC^2=AB^2$, 四边形 $ABCD$ 对角线交于 E, 点 P 在边 AB 上使 $\angle APD=\angle BPC$. 证明: 直线 PE 平分线段 CD.



证明 设 AB,CD 中点为 M,N, EN 交 AB 于 Q. 我们证明 $P\equiv Q$.

由于 $\triangle CED\sim\triangle BEA$, 且 N,M 为相似对应点, 故

$$\angle MEB=\angle NEC=\angle AEQ,$$

得 EQ 为 $\triangle AEB$ 中 $\angle E$ 内的陪位中线, 结合 $\triangle AED\sim\triangle BEC$, 有

$$\frac{AQ}{BQ}=\left(\frac{EA}{EB}\right)^2=\left(\frac{AD}{BC}\right)^2.$$

又

$$AB^2=AD^2+BC^2,$$

故

$$\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{AD^2}{AD^2+BC^2}=\frac{AQ}{AQ+BQ}=\frac{AQ}{AB},$$

即 $AD^2=AB\cdot AQ$, 结合 $\angle QAD=\angle DAB$, 知 $\triangle QAD\sim\triangle DAB$, 有

$$\angle DQA=\angle BDA.$$

类似地, $\angle CQB=\angle BCA$. 故

$$\angle DQA=\angle BDA=\angle BCA=\angle CQB.$$

又注意到对线段 AB 上一点 X,

$$\angle DXA=\angle XDB+\angle DBA \text{ 关于 } BX \text{ 递增;}$$

$$\angle CXB=\angle CAB+\angle XCA \text{ 关于 } BX \text{ 递减,}$$

故 AB 上至多一点 P 满足 $\angle CPB=\angle DPA$. 结合 $\angle DQA=\angle CQB$ 知

$$P\equiv Q,$$

有 EP 平分 DC. 证毕! $\square$

评析 简单题. 此法由结论倒推得到, 需说明 P 的唯一性.

题 3. 设 K 为所有十进制表示中不含数码 7 的正整数构成的集合. 求所有系数非负的整系数多项式 f, 使得对任意 $n \in K$, 均有 $f(n) \in K$.

解 所求为 $f(n) = 10^{\alpha}n + m$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $m = 0$ 或 $m < 10^{\alpha}$ 且 $m \in K$; 或 $f(n) = m$, $m \in K$.

一方面, 这样的 f 显然满足要求 (因 $f(n)$ 十进制表示中非零数码要么为 n 的数码, 要么为 m 的数码).

另一方面, 对满足要求的 f, 我们先证明一个引理.

引理 若正整数 a 满足对 $n \in K$, $an \in K$, 则 a 为 10 的幂.

证明 设

$$\frac{8}{a} = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \cdot 10^{-(\beta+i)},$$

$$\frac{7}{a} = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \cdot 10^{-(\beta+i)},$$

$$\frac{1}{a} = \sum_{i=0}^{+\infty} z_i \cdot 10^{-(\beta+i)},$$

其中 β 为非负整数, $x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, \cdots, 9\}, x_0 > 0$, 且$\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}$ 均不为最终全为 9 的数列. 由于 $\frac{1}{a} > \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{a}$, 故

$$z_0 + 10^{-1} \cdot z_1 > 0.$$

下考虑 z_0 是否为 0.

(I) $z_0 > 0$, 那么 $x_0 \geq y_0 + z_0 \geq y_0 + 1$.

(i) 若 $y_0 \neq 7$, 则因 $\{y_i\}$ 不会最终全为 9, 必存在 $j \in \mathbb{N}^{+}$, 满足

$$\frac{7}{a} \leq 10^{-\beta} \cdot y_0 + 9(10^{-(\beta+1)} + \cdots + 10^{-(\beta+j)}) < 10^{-\beta}(y_0 + 1) < \frac{8}{a},$$

故有

$$a\left(10^{j}y_0 + 9(10^{j-1} + \cdots + 10^{0})\right) \in [7 \cdot 10^{j+\beta},\ 8 \cdot 10^{j+\beta}),$$

其首位为 7 且不在 K 中, 但

$$10^{j}y_0 + 9(10^{j-1} + \cdots + 10^{0}) \in K,$$

与引理条件矛盾!

(ii) 若 $y_0 = 7$, 此时

$$x_0 \geq y_0 + 1 = 8,\ \frac{8}{a} \geq 8 \cdot 10^{-\beta}.$$

若 $\frac{8}{a} > 8\cdot 10^{-\beta}$, 则 $\frac{7}{a} < 10^{-\beta}\cdot 8 < \frac{8}{a}$, 有

$$8a \in \left(7\cdot 10^{\beta},\ 8\cdot 10^{\beta}\right),$$

首位为 7 不在 K 中, 但 $8\in K$, 这与引理条件矛盾! 故

$$\frac{8}{a} = 8\cdot 10^{-\beta},$$

有 $a = 10^{\beta}$ 为 10 的幂.

(II) $z_0 = 0$, 由 $z_0 + 10^{-1}z_1 > 0$ 知 $z_1 > 0$. 此时, $\frac{1}{a} < 10^{-\beta}$, 有

$$\frac{7}{a} < 10^{-\beta}\cdot 7,$$

即 $y_0 < 7$.

若 $x_0 > y_0$, 类似于 (I) 的 (i) 知这与引理条件矛盾!

因此 $x_0 = y_0$, 有 $x_0, y_0 < 7$. 下考虑 x_1 与 y_1. 由于

$$10x_0 + x_1 \geq 10y_0 + y_1 + 10z_0 + z_1,$$

有

$$x_1 \geq y_1 + z_1 \geq y_1 + 1.$$

类似于 (I) 知

$$\frac{1}{a} = 10^{-(\beta+1)},$$

但此时 $x_0 = 0$, 与 $x_0 \neq 0$ 矛盾!

综合 (I), (II) 知 a 为 10 的幂, 引理证毕!

回到原题. 设

$$f(n) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_k, \cdots, a_0 \in \mathbb{N}, k\in\mathbb{N}, a_k > 0.$$

我们先证明 $k \leq 1$. 否则, 若 $k \geq 2$, 取

$$n_0 = (3\cdot 10^{\alpha} + c)\cdot 10^{\gamma},$$

α, γ, c 待定, $\alpha, \gamma, c \in \mathbb{N}^*$. 由于 $3^{k-1}\cdot k\cdot a_k$ 必不为 10 的幂, 由引理知, 存在 $c\in K$, 使 $3^{k-1}ka_kc \notin K$. 取 α 满足

$$10^{\alpha} > 3^k\cdot c^k a_k\cdot 2^k;$$

取 γ 满足

$$10^{\gamma} > a_k(3\cdot 10^{\alpha}+c)^k + \cdots + a_1(3\cdot 10^{\alpha}+c) + a_0.$$

那么

$$f(n_0) = a_0 + a_1(3\cdot 10^{\alpha}+c)\cdot 10^{\gamma} + \cdots + a_{k-1}(3\cdot 10^{\alpha}+c)^{k-1}\cdot 10^{\gamma(k-1)}$$

$$+10^{\gamma k}\left(a_k\mathrm{C}_k^0 3^k c^0\cdot 10^{\alpha k}+a_k\mathrm{C}_k^1 3^{k-1}c^1\cdot 10^{\alpha(k-1)}+\cdots+a_k\mathrm{C}_k^k 3^0 c^k\cdot 10^{\alpha\cdot 0}\right).$$

其十进制表示为

$$a_k\mathrm{C}_k^0 3^k c^0,\ a_k\mathrm{C}_k^1 3^{k-1}c^1,\cdots,a_k\mathrm{C}_k^k 3^0 c^k,$$

$$a_{k-1}(3\cdot 10^\alpha+c)^{k-1},\ \cdots,\ a_1(3\cdot 10^\alpha+c),\ a_0.$$

间加上若干“0”后首尾拼接而成 (用到 α,γ 定义).

又 $a_k\mathrm{C}_k^1 3^{k-1}c^1\notin K$, 故 $f(n_0)\notin K$. 而由 $c\in K$ 知 $n_0\in K$, 这与对 $n\in K$ 有 $f(n)\in K$ 矛盾! 故 $k\leq 1$.

当 $k=0$ 时, $f(n)=m$, m 为常数. 此时 $m\in K$ 显然!

当 $k=1$ 时, 设 $f(n)=an+m$, 取 $n=10^\delta\cdot n_1,\ 10^\delta>m,\ n_1\in\mathbb{N}^*$, 有对 $n_1\in K,\ an_1\in K$; $m\in K$ 或 $m=0$ (因对 $n\in K,\ f(n)\in K$).

结合引理知 a 为 10 的幂, 可设

$$f(n)=10^\alpha n+m,\ m\in K\text{ 或 }m=0,\ \alpha\in\mathbb{N}.$$

此时若 $m\geq 10^\alpha$, 设 $10^{\alpha+i_0}\leq m<10^{\alpha+i_0+1},\ i_0\in\mathbb{N}$, 并设 m 首位为 j_0.

取 $n=(17-j_0)\cdot 10^{i_0}$, 则

$$f(n)=(17-j_0)\cdot 10^{\alpha+i_0}+m=17\cdot 10^{\alpha+i_0}+A,$$

其中 $A<10^{\alpha+i_0}$, 那么 $10^{\alpha+i_0}$ 位对应的数码为 7, 不在 K 中.

又 $1\leq j_0\leq 9$, 有 $n\in K$, 这与对 $n\in K,\ f(n)\in K$ 矛盾! 故 $m<10^\alpha$.

综上, 所求 f 为 $f(n)=10^\alpha n+m,\ \alpha\in\mathbb{N},\ m=0$; 或 $m\in K$ 且 $m<10^\alpha$; 或 $f(n)=m, m\in K$. $\square$

评析 此题是循序渐进的好题.

(I) 先处理最简单的情形, 即引理.

为使一个正整数中必含某个数码, 有两种想法.

(1) 数论方法: 同余;

(2) 代数方法:

$A\cdot 10^{\alpha+1}+B\cdot 10^\alpha\leq x<A\cdot 10^{\alpha+1}+(B+1)\cdot 10^\alpha\ (B\in\{0,1,\cdots,9\})$,

则 x 含 B. 常用弱化: $A=0$.

此题 (1) 也可行, 可尝试用模 10 构一个个位为 8 的数 C, 再用 $10^\gamma C-D$ 的形式得到 7 来解决大部分情形. 而对于 (2), 我们在原解答基础上再做一步特化.

考虑 $1,a,a^2,\cdots$ 它们均在 K 中, 而其中必有一数首位为 7 (由 Dirichlet 定理易证!)

(II) 对复杂情形, 我们希望利用简单情形, 需构造“一次项”. 因此我们构造了“分段”的形式, 这在数码问题中常用. 数码中重要的部分有两种:

一是“分段”, 保持了每一段自身的性质.

二是段与段的交界点, 可能相加后发生进位导致突变.

题 4. 给定正整数 n, 确定有多少种方式选取 $(n+1)^2$ 个集合 $S_{ij} \subseteq \{1,2,\cdots,2n\}$, 其中 $i,j=0,1,\cdots,n$, 满足以下两个条件:

(1) 对任意 $i,j \in \{0,1,\cdots,n\}$, 集合 $S_{i,j}$ 有 $i+j$ 个元素;

(2) 对任意 $0 \le i \le k \le n$, $0 \le j \le l \le n$, 均有 $S_{i,j} \subseteq S_{k,1}$.

解 所求为 $(2n)! \cdot 2^{n^2}$. 我们分两步确定所求集族:

(I) 我们先确定集合链

$$S_{0,0} \subseteq S_{0,1} \subseteq \cdots \subseteq S_{0,n} \subseteq S_{1,n} \subseteq \cdots \subseteq S_{n,n}.$$

注意到, 由 (1) 有 $S_{0,0}=\emptyset$, $S_{n,n}=\{1,2,\cdots,2n\}$, 并且由 (1),(2) 有: 该链上除 $S_{0,0}$ 外的每个集合, 恰比它的前一个集合多一个元素.

设这样的元素从左往右依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$, 则该集合链与序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 一一对应, 其即为

$$\emptyset \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1,a_2\} \subseteq \cdots \subseteq \{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\},$$

并且 $a_1,\cdots,a_{2n}$ 为 $1,2,\cdots,2n$ 的一个排列.

故这样的集合链恰为 $(2n)!$ 条.

(II) 我们再依次确定 $(S_{i,0},\cdots,S_{i,n-1})$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 使它们满足

$$S_{i-1,j} \subseteq S_{i,j} \subseteq S_{i,j+1},$$

且

$$|S_{i,j}|=i+j,\ 0 \le j \le n-1, 1 \le i \le n.$$

对给定的 $m \in \mathbb{N}$, $m \le n-1$. 当 $S_{i,j}$ $(0 \le i \le m, 0 \le j \le n)$ 及 $S_{m+1,k+1}$, $S_{m+1,k+2},\cdots,S_{m+1,n}$ 均已确定时 $(0 \le k \le n-1)$, 由于

$$|S_{m,k}|=m+k,\ |S_{m+1,k+1}|=m+k+2.$$

故可设

$$S_{m+1,k+1} \setminus S_{m,k}=\{a,b\},$$

恰存在 2 个 A 满足

$$S_{m,k} \subseteq A \subseteq S_{m+1,k+1},$$

且

$$|A| = m + k + 1.$$

即 $S_{m,k} \cup \{a\}$ 与 $S_{m,k} \cup \{b\}$. 故此时 $S_{m+1,k}$ 有两种选择.

由此即知: 当 $S_{i,j}$ $(0 \le i \le m, 0 \le j \le n)$ 均已给定时,

$$(S_{m+1,0}, \cdots, S_{m+1,n-1})$$

共 2^n 个选择, 故 $S_{i,j}$ $(1 \le i \le n, 0 \le j \le n-1)$ 共 2^{n^2} 种选择. 并且, 在如此确定整个集族后, 对 $0 \le i \le r \le n$, $0 \le j \le l \le n$, 有

$$S_{i,j} \subseteq S_{i,j+1} \subseteq \cdots \subseteq S_{i,l} \subseteq S_{i+1,l} \subseteq \cdots \subseteq S_{r,l},$$

满足条件 (2). 而满足条件的集族显然满足确定过程中条件.

因此, 这样确定的集族即为所求. 综合 (I), (II), 所求为 $(2n)! \cdot 2^{n^2}$ 种 (用到乘法原理).

综上, 所求为 $(2n)! \cdot 2^{n^2}$. □

评析 此题属于简单题, 找到一个简单的生成方法即可. "先定边界再往中间"是常用方法. 应注意一一对应并非显然.

题 5. 黑板上写有两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{n}{m}$, 其中 m, n 是互素的正整数. 每一步, 埃文可以选取黑板上的两个数 x, y, 在黑板上添上它们的算术平均 $\frac{x+y}{2}$, 或添上它们的调和平均 $\frac{2xy}{x+y}$. 试确定所有 (m, n), 使得埃文可在有限步内在黑板上写下数 1.

解 所求为 $(k, 2^\alpha - k), \alpha \in \mathbb{N}^*$, k 为小于 2^α 的正奇数.

一方面, 我们先归纳证明对 $\beta \in \mathbb{N}^*$ 及小于 2^β 的正奇数 l,

$$\frac{l}{2^\beta} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^\beta - l}{2^\beta} \cdot \frac{n}{m} \tag{$*$}$$

可写在黑板上.

$\beta = 1$ 时, 此即 $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right)$ 可写在黑板上, 结论显然成立.

设 $\beta = \gamma$ 时结论成立.

当 $\beta = \gamma + 1$ 时, 若 $l < 2^\gamma$, 由归纳假设

$$\frac{l}{2^\gamma} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^\gamma - l}{2^\gamma} \cdot \frac{n}{m}$$

可写在黑板上. 故

$$\frac{l}{2^{\gamma+1}} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^{\gamma+1} - l}{2^{\gamma+1}} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{2^\gamma} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^\gamma - l}{2^\gamma} \cdot \frac{n}{m}\right) + \frac{n}{m}\right)$$

可写在黑板上.

若 $2^\gamma \le l < 2^{\gamma+1}$, 由 $2 \nmid l$ 知 $2^\gamma < l < 2^{\gamma+1}$. 由归纳假设,

$$\frac{l-2^\gamma}{2^\gamma} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^{r+1}-l}{2^r} \cdot \frac{n}{m}$$

可写在黑板上. 故

$$\frac{l}{2^{\gamma+1}} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^{\gamma+1}-l}{2^\gamma} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{l-2^\gamma}{2^\gamma} \cdot \frac{m}{n} + \frac{2^{\gamma+1}-l}{2^\gamma} \cdot \frac{n}{m}\right) + \frac{m}{n}\right)$$

可写在黑板上.

故 $\beta = \gamma + 1$ 时结论成立, 归纳即知 $(*)$ 成立.

由 $(*)$ 知, 当 $(m, n) = (k, 2^\alpha - k)$ 时,

$$1 = \frac{k}{2^\alpha} \cdot \frac{2^\alpha - k}{k} + \frac{2^\alpha - k}{2^\alpha} \cdot \frac{k}{2^\alpha - k}$$

可写在黑板上, 故 $(k, 2^\alpha - k)$ 满足要求.

另一方面, 对满足要求的 (m, n), 我们证明 $m + n$ 为 2 的幂.

设 $m + n = 2^\alpha \cdot P$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $2 \nmid P$, $P \in \mathbb{N}^*$, 下证 $P = 1$.

我们先递推的确定 $\{P_t\}_{t \ge 1}$: P_1 集合为 $\frac{m}{n}$ 与 $\frac{n}{m}$ 构成的集合, P_t 为所有 P_{t-1} 中某两数 (不必不同) 的算术平均或调和平均的数构成的集合.

下面对 t 进行归纳证明: 对 $\frac{x}{y} \in P_t$, x, y 互素, 有

$$P \mid x + y. \qquad (**)$$

$t = 1$ 时结论显然成立.

设 $t = r$ 时结论成立. 则当 $t = r + 1$ 时, 考虑 $\frac{x}{y}$ 的来源, 设其为 $\frac{x_1}{y_1}$ 与 $\frac{x_2}{y_2}$ 的算术平均或调和平均, 其中 x_1 与 y_1, x_2 与 y_2 互素, $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2} \in P_r$.

由归纳假设, $P \mid x_1 + y_1$, $P \mid x_2 + y_2$, 故

$$\gcd(P,\ 2y_1y_2) = 1, \qquad (\star)$$

这里用到 x_1 与 y_1, x_2 与 y_2 互素.

下面分两种情况讨论:

(I) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right)$, 则

$$\frac{x+y}{y} = \frac{(x_1+y_1)y_2 + (x_2+y_2)y_1}{2y_1y_2}.$$

又 $P \mid x_1 + y_1$, $P \mid x_2 + y_2$, $\gcd(P, 2y_1y_2) = 1$ (用到 $(\star)$ 及 P 为奇数), 故

$$P \mid x + y.$$

(II) $\frac{x}{y} = \frac{2\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}}{\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}}$, 则

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right).$$

有

$$\frac{y+x}{x}=\frac{1}{2}\frac{(x_1+y_1)x_1+(x_2+y_2)x_1}{x_1x_2}.$$

类似于 (I) 知 $P \mid x+y$. 综合 (I), (II) 知

$$P \mid x+y.$$

归纳即知 $(**)$ 获证!

又由 $(**)$ 及 1 在某个 P_t 中知 $P \mid 1+1$, 故 $P=1$ (用到 $2 \nmid P$). 故 $m+n$ 为 2 的幂, 为 2^α. 结合 m,n 为互质正整数知

$$(m,n)=(k,2^\alpha-k),\ \alpha\in\mathbb{N}^*,\ k\text{ 为小于 }2^\alpha\text{ 的正奇数}$$

综上, 所求为 $(k,2^\alpha-k)$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$, k 为小于 2^α 的正奇数. □

评析 典型的单人操作问题中的运算问题. 经典的思路是找不变量, 对运算次数归纳, 这样有助于“化整为零”. 此题由 $(*)$ 可猜出答案, 自然猜不变量 $m+n$ 与 2 的幂有关, 便不难发现 $(**)$, 即证.

题 6. 求所有实系数多项式 P, 满足对任意非零实数 x,y,z, 若 $2xyz=x+y+z$, 则

$$\frac{P(x)}{yz}+\frac{P(y)}{zx}+\frac{P(z)}{xy}=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x).$$

解 所求 $P(x)=t(x^2+3)$, $t\in\mathbb{R}$.

一方面, 当 $P(x)=t(x^2+3)$ 时, 对非零实数 x,y,z 满足 $2xyz=x+y+z$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{P(x)}{yz}&=t\sum_{cyc}\frac{x^3+3x}{xyz}=\frac{t}{xyz}\left(\sum_{cyc}x^3+6xyz\right)\\&=\frac{t}{xyz}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}(x-y)^2\right)+9xyz\right)\\&=t\left(\sum_{cyc}(x-y)^2+9\right)=\sum_{cyc}P(x-y),\end{aligned}$$

故 $P(x)=t(x^2+3)$ 满足要求, 其中第二行等式用到恒等式

$$\sum_{cyc}x^3=\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{cyc}(x-y)^2\right)+3xyz.$$

另一方面, 对满足要求的 $P(x)$, 我们证明其必形如 $t(x^2+3)$, $t\in\mathbb{R}$.

记 $Q(x,y,z)=\sum\limits_{cyc}xP(x)-xyz\sum\limits_{cyc}P(x-y)$, 由条件知

$$Q\left(x,y,\frac{x+y}{2xy-1}\right)=0,\tag{$*$}$$

对 $x\neq 0, y\neq 0, x+y\neq 0$ 且 $2xy\neq 1$ 的所有实数 x,y 成立.

那么可在 $(*)$ 两边同乘以 $(2xy-1)^{\alpha}$, α 为充分大的正整数, 使 $(*)$ 变为 $R(x,y)=0$, 其中 R 为关于 x,y 的多项式. 而任意给定 $x=x_0$ 为非零实数时, 因存在无数个 y, 满足 $y\neq 0$, $y+x_0\neq 0$, $2x_0y\neq -1$, 故存在无数个 $y\in\mathbb{R}$, 使得 $R(x_0,y)=0$. 故对 $y\in R$, $R(x_0,y)=0$. 故对 $x,y\in\mathbb{R}$, $R(x,y)=0$. 进而对 $x,y\in\mathbb{C}$, $R(x,y)=0$.

下取 $(x,y)=(u,-u)$, $u\in\mathbb{R}$, 有 $R(u,-u)=0$, 即 $Q(u,-u,0)=0$. 即

$$u\left(P(u)-P(-u)\right)=0.$$

有 $P(u)=P(-u)$ 对 $u\in\mathbb{R}$ 成立. (1)

再取 $(x,y)=\left(x,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 有 $R\left(x,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)=0$, 由于

$$\frac{x+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}}{2x\cdot\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}-1}=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},$$

有 $Q\left(x,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)=0$. 从而

$$\begin{aligned}&xP(x)+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(P\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)-P\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right)\\=&\frac{1}{2}x\left(P\left(x-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)+P(\sqrt{2}\mathrm{i})+P\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}-x\right)\right).\end{aligned}$$

结合 (1) 知, 此即

$$2P(x)-P\left(x-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)-P\left(x+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)=P(\sqrt{2}\mathrm{i}). \tag{2}$$

下设 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$.

我们证明 $n\leq 2$. 这是因为 $n\geq 3$ 时, (2) 式左边 x^{n-2} 的系数为

$$-2a_n\mathrm{C}_n^2\cdot\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2\neq 0,$$

而 (2) 式右边为常数, 这不可能!

结合 (1) 可设 $P(x)=cx^2+d$, 代入 (2) 知 $c=-2c+d$, 故 $d=3c$. 即有 $P(x)$ 形如 $t(x^2+3), t\in\mathbb{R}$.

综合两方面知, 所求为

$$P(x)=t(x^2+3), t\in\mathbb{R}.$$

评析 此题关键在于意识到条件 $x+y+z=2xyz$ 为“一次式”, 可解出 z, 从而使问题变为二元多项式问题, 再通过赋特殊值简化. 要小心这“两步走”, 先窥探本质, 再“加码”优化. 固然直接比较 $R(x,y)$ 系数“可行”, 但明显麻烦, 不如再想一步: 是否有特殊值.

此题代 $(x,x,\frac{2x}{2x^2-1})$, $(x,\frac{1}{x},x+\frac{1}{x})$ 均可行, 不如此法简明. 另外, 多元多项式的整除问题一般需用到 $\mathbb{C}$ 上条件, $\mathbb{R}$ 上除非像此题有“全在 $\mathbb{R}$ 上的零点”, 否则不可行. 即: “若 $R(x,y,z)=0$ 时, $Q(x,y,z)=0$, 对 $x,y,z\in R$ 成立, 不一定有 $R(x,y,z)\mid Q(x,y,z)$”, 这一点需留心.