2019 年夏季上海新星数学奥林匹克试题解析

罗振华[1], 吴尉迟[2], 金天[2], 冷岗松[2]
(1. 华东师范大学, 200241; 2. 上海大学, 200444)

2019 年夏季上海新星数学奥林匹克于 2019 年 6 月 4 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答.

I. 试 题

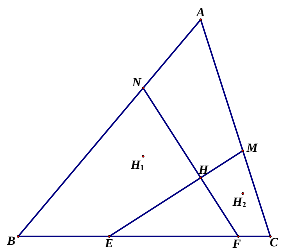
1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2019}$ 是实数, 且满足 $x_1 + \cdots + x_{2019} \in \mathbb{Z}$. 求

$$\sum_{1 \le i < j \le 2019} \{x_i + x_j\}$$

的最大值.

(山西大学附属中学 王永喜 供题)

2. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, E, F 在 BC 上, $EH \perp HF$, 延长 EH 与 AC 交于 M, 延长 FH 与 AB 交于 N. H_1, H_2 为 $\triangle BNF, \triangle CME$ 的垂心. 证明: H_1, H, H_2 共线.



(广西钦州 卢圣 供题)

3. 设 n, r 为正整数, $n > r$. 将圆周上给定的 $2n$ 个点染 n 种颜色, 每色染 2 个点, 且任何两个同色点之间恰有 r 个点.

(1) 试问: n, r 能否同为奇数?

(2) 如果 $r + 1$ 为质数, 求 n 的所有可能取值.

(深圳高级中学 冯跃峰 供题)

4. 证明: 存在全体正整数的一个排列 $a_1, a_2, \cdots$, 使得对任意自然数 i, 均有

$$(a_i, a_{i+1}) \ge \frac{i}{2}.$$

修订日期: 2019-06-25.

(哥伦比亚大学 饶家鼎 供题)

5. 设 n 是正整数, $2n$ 个实数 $x_i, y_i (1 \le i \le n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

已知 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, $1 \in [\lambda_1, \lambda_n]$. 证明:

$$\lambda_1 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \le \lambda_n.$$

(北京大学 王逸轩 供题)

6. 对边互不平行的四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 设对角线 AC, BD 交于点 P, 直线 AD, BC 交于点 E, M 是 OP 的中点. 已知 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle APB, \triangle CPD$ 的外心共圆, 证明: 该圆圆心是 $\triangle OME$ 的垂心.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

Ⅱ. 解 答

题 1 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2019}$ 是实数, 且满足 $x_1 + \cdots + x_{2019} \in \mathbb{Z}$. 求

$$\sum_{1 \le i < j \le 2019} \{x_i + x_j\}$$

的最大值.

解 我们用奇数 n 代替 2019 解决更一般的问题:

设 n 是奇数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数, 且满足 $x_1 + \cdots + x_n \in \mathbb{Z}$. 求

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \{x_i + x_j\}$$

的最大值.

引理 设 $[0, 1)$ 上的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \in \mathbb{Z}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} a_k \le k - 1.$$

引理证明 事实上, 注意到

$$\sum_{i=1}^{k} a_k < k,$$

结合 $a_1+a_2+\cdots+a_k\in\mathbb{Z}$ 可知

$$\sum_{i=1}^{k}a_k\le k-1.$$

故引理获证.

回到原题. 注意到

$$\sum_{1\le i<j\le n}\{x_i+x_j\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{x_i+x_{i+k}\},$$

而对每个正整数 $k\ (1\le k\le n-1)$,

$$\sum_{i=1}^{n}\{x_i+x_{i+k}\}=2\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\lfloor x_i+x_{i+k}\rfloor$$

是一个整数, 由引理可知

$$\sum_{i=1}^{n}\{x_i+x_{i+k}\}\le n-1,$$

故

$$\sum_{1\le i<j\le n}\{x_i+x_j\}\le\frac{(n-1)^2}{2},$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{n-1}{2n}$ 时等号成立. 事实上, 由 n 是奇数, $\{x_i\}=\frac{n-1}{2n}<\frac{1}{2}$, 则

$$\sum_{1\le i<j\le n}\{x_i+x_j\}=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)^2}{2}.$$

故对一般的问题最大值为 $\frac{(n-1)^2}{2}$.

特别的, 当 $n=2019$ 时, 所求最大值为 2036162. □

评注 这是一道中等难度的代数题, 考场上有 32% 的学生做对此题, 该题比我们预期的难度要大, 可能的原因是学生不大擅长处理带有组合意味的不等式. 本题的关键在于按下标差整理和式, 对每一种下标差寻找一个局部不等式, 利用引理即可得出结论.

此题的背景是 2014 年北京大学挑战赛一道题:

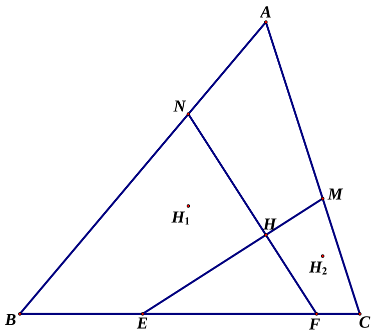
$a_1+a_2+\cdots+a_6=2014$, 求 $\sum\limits_{1\le i<j\le 6}\lfloor a_i+a_j\rfloor$ 的最小值.

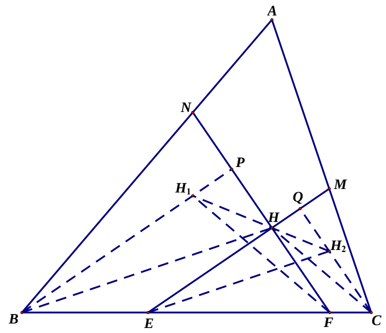
近几年也出现了不少与小数部分之和有关的竞赛题,例如 2018 年中国西部数学邀请赛第二题:

设整数 $n\ge 2$, 正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 证明:

$$\{x_1\}+\{x_2\}+\cdots+\{x_n\}<\frac{2n-1}{2}.$$

题 2 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, E, F 在 BC 上, $EH \perp HF$, 延长 EH 与 AC 交于 M, 延长 FH 与 AB 交于 N. H_1, H_2 为 $\triangle BNF, \triangle CME$ 的垂心. 证明: H_1, H, H_2 共线.





证明 1 (浙江乐清知临中学韩新淼) 延长 BH_1、CH_2 分别与 NF、EM 交于 P、Q. 由于 BP, EM 都与 FN 垂直, 则有 $BP \parallel EM$.

同理, $CQ \parallel NF, BH \parallel EH_2, CH \parallel FH_1$. 所以

$$\triangle BPF \sim \triangle EQC, \triangle BPH \sim \triangle EQH_2, \triangle CQH \sim \triangle FPH_1.$$

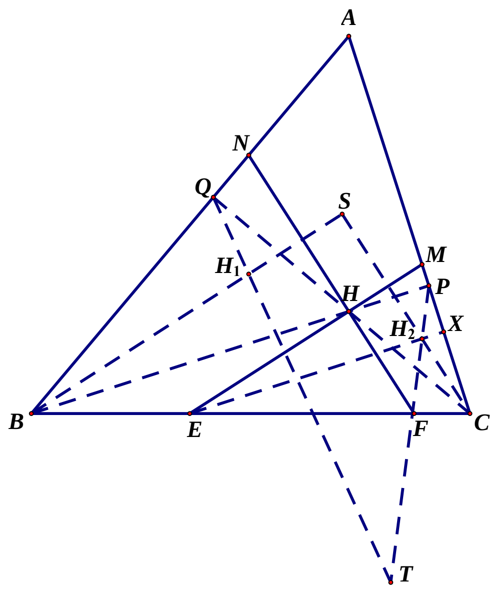
故

$$\frac{H_1P}{HQ} = \frac{PF}{QC} = \frac{BP}{EQ} = \frac{PH}{QH_2},$$

从而 $\triangle H_1PH$ 与 $\triangle HQH_2$ 相似.

注意到 $H_1P \parallel HQ, PH \parallel QH_2$, 那么 $\triangle H_1PH$ 与 $\triangle HQH_2$ 位似. 所以 $H_1H \parallel HH_2$. 故 H_1、H、H_2 三点共线. $\square$

证明 2 (李先颖)



设直线 BH 与 AC 交于 P, 直线 CH 与 AB 交于 Q, 直线 BH_1 与 CH_2 交于 S, 直线 PH_2 与 QH_1 交于 T. 注意到

$$\begin{aligned}\tan\angle CPH_2 &= \frac{H_2X}{XP} = \frac{H_2X}{XM}\cdot\frac{XM}{XP} = \cot\angle C\cdot\frac{EM}{EH}\\ &= \cot\angle C\cdot\frac{EC\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle EMC}}{EC\cdot\frac{\cos\angle B}{\sin\angle EHC}} = \frac{\sin\angle EHC}{\sin\angle EMC},\end{aligned}$$

同理,

$$\tan\angle BQH_1 = \frac{\sin\angle FHB}{\sin\angle FNB}.$$

故

$$\tan\angle CPH_2\cdot\tan\angle BQH_1 = \frac{\sin\angle EHC\cdot\sin\angle FHB}{\sin\angle EMC\cdot\sin\angle FNB} = 1,$$

最后一个等号用了 $\angle EHC = \pi - \angle FNB, \angle FHB = \pi - \angle EMC$.

所以 $\angle CPH_2 + \angle BQH_1 = \frac{\pi}{2}$, 这说明点 T 在以 BC 为直径的圆上. 又注意到 $BH_1 \perp FN, CH_2 \parallel FN$, 则 $BH_1 \perp CH_2, \angle BSC = \frac{\pi}{2}$. 那么 P, Q, S, T 均在以 BC 为直径的圆上, 对圆内接六边形 $BPTQCS$ 使用 Pacal 定理知 H, H_1, H_2 共线. $\square$

评注 这是一道简单的几何题, 考场上约 70% 的学生做对. 上述两个解法均十分巧妙, 解法 1 通过找相似三角形和导比例来证明 $\triangle H_1PH$ 与 $\triangle HQH_2$ 位似, 从而证得结论; 解法 2 直接找到一个圆内接六边形, 使 H, H_1, H_2 分别是这个六边形三组对边的交点, 由 Pascal 定理可以证得结论.

题 3 设 n, r 为正整数, $n > r$. 将圆周上给定的 $2n$ 个点染 n 种颜色, 每色染 2 个点, 且任何两个同色点之间恰有 r 个点.

(1) 试问: n, r 能否同为奇数?

(2) 如果 $r+1$ 为质数, 求 n 的所有可能取值.

解 (浙江乐清知临中学韩新淼) 我们证明: n, r 满足的充要条件为

$$v_2(n) \geq v_2(r+1). \tag{$*$}$$

其中 $v_2(m)$ 表示 m 所含的 2 的幂次.

构造 $2n$ 个顶点的有向图 G, 其顶点对应 $1, 2, \cdots, 2n$. 对顶点 i, j, 连边 $i \to j$ 当且仅当

$$j - i \equiv r + 1 \pmod{2n},$$

当 $r + 1 = n$ 时, 允许同时有边 $i \to j$ 和 $j \to i$.

题设中的条件等价于可在 G 中找 n 条有向边, 不重不漏地覆盖了 G 的所有顶点. 注意到图 G 由若干圈组成, 且对任意顶点 i, 含该点的有向圈长度 l 即为满足 $l(r+1)\equiv 0 \pmod{2n}$ 的最小正整数, 即 $\frac{2n}{(2n,r+1)}$. 于是图 G 恰由 $(2n,r+1)$ 个有向圈组成, 且每个有向圈长度为 $\frac{2n}{(2n,r+1)}$.

题设中的条件等价于 G 所含的每个有向圈均为偶圈, 即 $\frac{2n}{(2n,r+1)}$ 为偶数, 这等价于 $v_2(2n)>v_2(r+1)$, 即 $v_2(n)\geq v_2(r+1)$.

(1) 由 $(*)$ 知, n,r 不能同时为奇数.

(2) 若 $r+1$ 为素数, 分两种情况.

当 $r+1=2$ 时, 由 $(*)$, n 为一切正偶数.

当 $r+1$ 为奇素数时, 由 $(*)$, n 为一切大于 r 的整数. □

评注 这是一道中等难度的组合题, 考场上约 36% 的学生做对. 上述解法直接讨论了一般的情况, 再把问题转换成图论问题后观察到题设条件等价于图中每个有向圈均为偶圈, 从而得到了一般问题的充要条件为 $v_2(n)\geq v_2(r+1)$, 再去解决原题的两问就十分容易了.

题 4 证明: 存在全体正整数的一个排列 $a_1,a_2,\cdots$, 使得对任意自然数 i, 均有

$$(a_i,a_{i+1})\geq \frac{i}{2}.$$

证明 我们用归纳法构造满足条件的排列.

取 $a_1=1,a_2=2$, 成立.

假设对 $k\in\mathbb{N}^*$, 已经选取了 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k}$ 满足题目条件.

取 a_{2k+2} 为不在 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k}$ 中出现的最小正整数, 再取 a_{2k+1} 为不在 $a_1,a_2,\cdots,a_{2k},a_{2k+2}$ 中出现的某个 a_{2k},a_{2k+2} 的公倍数.

下面说明这样的构造满足要求.

由构造的方法知, 每个正整数恰在 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ 中出现一次, 故是全体正整数的一个排列. 另外, 对任意 $s\in\mathbb{N}^*$, 有

$$a_{2s}>a_{2s-2}>\cdots>a_2=2,$$

故 $a_{2s}\geq s+1$. 于是对任意 $j\in\mathbb{N}^*$, 均有

$$(a_{2j},a_{2j+1})=a_{2j}\geq j+1\geq\frac{2j}{2},$$

$$(a_{2j+1},a_{2j+2})=a_{2j+2}\geq j+2\geq\frac{2j+1}{2}.$$

从而它满足要求. 故结论成立. $\square$

评注 这是一道中等难度的数论构造题, 考场上约 42% 的学生做对. 用归纳法来构造是比较自然的想法, 为了满足题目条件在归纳过渡可取一项为前面没有出现的最小正整数, 再取一项使得它是前项和后项的公倍数, 故只需分奇数位和偶数位构造即可满足要求.

本题是 2011 年中国国家集训队选拔考试第五题的逆向讨论, 原题如下:

设 $a_1, a_2, \cdots$ 为全体正整数的一个排列. 证明: 存在无穷多个正整数 i, 使得

$$(a_i, a_{i+1}) \leqslant \frac{3}{4} i.$$

题 5. 设 n 是正整数, $2n$ 个实数 $x_i, y_i (1 \le i \le n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

已知 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, $1 \in [\lambda_1, \lambda_n]$. 证明:

$$\lambda_1 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \le \lambda_n.$$

证明 1 (湖北武钢三中袁祉祯) 由于 $0 < \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$, 那么

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

要证原不等式只需证

$$\lambda_1 \left(1 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \le \lambda_n \left(1 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \right),$$

将条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$ 代入其中, 上式等价于

$$\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \le \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \right),$$

将上式同乘 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, 利用拉格朗日恒等式可知上式等价于

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \sum_{1 \le j < k \le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 \le \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{1 \le j < k \le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 \lambda_j \lambda_k$$

$$\le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \sum_{1\le j<k\le n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 .$$

下证上式对实数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 和 $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 成立.

$n=1$ 时, 上式成立. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中有一项为 0, 设 $y_{j_0}=0$, 则由

$$\lambda_1 x_{j_0}^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \lambda_{j_0} x_{j_0}^2 y_j^2 \le \lambda_n x_{j_0}^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

知, 只需证明除去 x_{j_0}, l_{j_0} 后 $n-1$ 时不等式的情形, 这样不断进行下去故可不妨设 $\prod_{j=1}^{n} y_j \ne 0$.

记 $a_i = y_i^2, b_i = \lambda_i y_i^2, u_i = \frac{x_i}{y_i} (i=1,2,\cdots,n)$. 即证:

$$\min_{1\le l\le n} \left\{\frac{b_l}{a_l}\right\} \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k (u_j-u_k)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{1\le j<k\le n} b_j b_k (u_j-u_k)^2$$
$$\le \max_{1\le l\le n} \left\{\frac{b_l}{a_l}\right\} \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k (u_j-u_k)^2.$$

下面在一般意义下证明上述不等式(而不是题目限制条件下). 由对称性, 只需证右边不等式即可.

由于不等式关于所有的 a_i 或 b_i 是齐次的, 不妨设 $\max\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\} = 1$, 则 $a_i \ge b_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

作增量代换 $x_i = a_i - b_i (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $x_i \ge 0$. 将 $a_i = b_i + x_i$ 代入可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{1\le j<k\le n} a_j a_k (u_j-u_k)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{1\le j<k\le n} b_j b_k (u_j-u_k)^2 \\
=&\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{1\le j<k\le n} (b_j x_k + b_k x_j + x_j x_k)(u_j-u_k)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{1\le j<k\le n} b_j b_k (u_j-u_k)^2 \\
\ge&\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{1\le j<k\le n} (b_j x_k + b_k x_j)(u_j-u_k)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{1\le j<k\le n} b_j b_k (u_j-u_k)^2 \\
=&\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} b_j (u_i-u_j)^2 - \sum_{1\le j<k\le n} b_j b_k (u_j-u_k)^2\right) \\
=&\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} b_k (u_i-u_k)\right)^2 \ge 0,
\end{aligned}$$

得证. □

证明 2 (山西大学附属中学王永喜) 设

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2},$$

对任意 $1 \le k \le n$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} &= x_k^2 - \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i\right)(x_k y_k)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i\right)^2 \cdot y_k^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(x_k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i\right)\cdot y_k\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2\right)^2} \\
&\ge 0,
\end{aligned}$$

故 f 关于每个 λ_k 都是单调递增的, 从而当所有 λ_k 取 λ_1 时 f 取最小值, 当所有 λ_k 取 λ_n 时 f 取最大值.

当所有 λ_k 取 λ_1 时,

$$f = \sum_{i=1}^{n}\lambda_1 x_i^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - \lambda_1(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 = \lambda_1 + (1-\lambda_1)(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \ge \lambda_1,$$

当所有 λ_k 取 λ_n 时,

$$f = \sum_{i=1}^{n}\lambda_n x_i^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - \lambda_n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 = \lambda_n + (1-\lambda_n)(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \le \lambda_n.$$

综上可知, 结论成立. □

证明 3 (北京大学 王逸轩) 我们证明比原题更强的结论:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i l_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i^2} \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\right) \\
&\le \lambda_n.
\end{aligned} \tag{$*$}$$

对于$(*)$中间的不等式, 由均值不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\right)^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i l_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i^2} \ge 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\right).$$

故不等式成立.

对于(*)最左边的不等式, 令 $u_i=\lambda_i-\lambda_1$, 那么 $u_i\geq 0$. 记 $b=\sum\limits_{i=1}^{n}x_il_i$, 则

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_ik_i\right)^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_il_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_il_i^2}\\
\Leftrightarrow\ &0\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i-\lambda_1\right)x_i^2+b^2-\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_1+u_i\right)x_il_i\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_1+u_i\right)l_i^2}\\
\Leftrightarrow\ &0\leq\sum_{i=1}^{n}u_ix_i^2+b^2-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}u_ix_il_i+\lambda_1b\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_il_i^2+\lambda_1}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i^2+b^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_il_i^2+\lambda_1\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_il_i+\lambda_1b\right)^2.
\end{aligned}$$

由于 $0<\lambda_1\leq 1$, 那么 $\lambda_1\geq\lambda_1^2$, 再结合柯西不等式知

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i^2+b^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_il_i^2+\lambda_1\right)&\geq\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i^2+b^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_il_i^2+\lambda_1^2\right)\\
&\geq\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_il_i+\lambda_1b\right)^2.
\end{aligned}$$

故不等式成立.

对于(*)最右边的不等式, 令 $v_i=\lambda_n-\lambda_i$, 则 $v_i\geq 0$. b 的记号与之前一样, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_il_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_il_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_il_i\right)^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_il_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_il_i\right)\leq\lambda_n\\
\Leftrightarrow\ &b^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_n-v_i\right)l_i^2\right)b^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_n-v_i\right)x_i\lambda_i\right)b\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_n-\lambda_i\right)x_i^2\\
\Leftrightarrow\ &b^2+\lambda_nb^2-\sum_{i=1}^{n}v_il_i^2b^2-2\lambda_nb^2+2\sum_{i=1}^{n}v_ix_il_ib\leq\sum_{i=1}^{n}v_ix_i^2\\
\Leftrightarrow\ &b^2\leq\lambda_nb^2+\sum_{i=1}^{n}v_ix_i^2+\sum_{i=1}^{n}v_il_i^2b^2-2\sum_{i=1}^{n}v_ix_il_ib\\
\Leftrightarrow\ &b^2\leq\lambda_nb^2+\sum_{i=1}^{n}v_i\left(x_i-l_ib\right)^2.
\end{aligned}$$

由于 $v_i\geq 0,\lambda_n\geq 1$, 故不等式成立.

综上可知, (*)成立, 从而原不等式获证. □

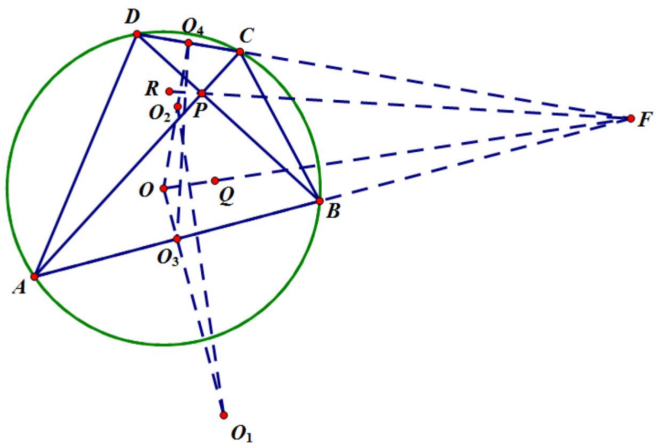
评注 这是一道非常困难的不等式问题, 考场上约 1% 的学生做对. 法 1 先用

题设条件对原不等式作齐次化处理, 再作变量代换后在一般意义下证明转化之后的不等式; 法 2 通过研究代数式关于 λ_k 的单调性, 把原不等式化简为 λ_k 都取 λ_1 或 λ_n 的情形, 最后把只需证明关于 λ_1 或 λ_n 的不等式即可; 法 3 非常巧妙, 只需作适当的和式变形并结合柯西不等式和均值不等式就证明了结论.

题 6. 对边互不平行的四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 设对角线 AC, BD 交于点 P, 直线 AD, BC 交于点 E, M 是 OP 的中点. 已知 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle APB$, $\triangle CPD$ 的外心共圆, 证明: 该圆圆心是 $\triangle OME$ 的垂心.

证明 设 O_1, O_2, O_3, O_4 分别是 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle APB, \triangle CPD$ 的外心, 设直线 AB, DC 交于点 F, 设 O_1, O_2, O_3, O_4 所共圆的圆心为 O^*.

第一步, 证明 $AC \perp BD$.



设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于点 O, Q, 则由蒙日定理, O, Q, F 三点共线. 因为 $O_1O_2 \perp OQ$, $O_1O_3 \perp AB$, 所以 $\angle O_2O_1O_3 = \angle OFA$.

设 $\odot O_3$ 与 $\odot O_4$ 交于点 P, R, 则由蒙日定理, P, R, F 三点共线. 因为 $O_3O_4 \perp PR$, $O_2O_4 \perp CD$, 所以 $\angle O_2O_4O_3 = \angle PFD$.

因为 O_1, O_2, O_3, O_4 四点共圆, 所以 $\angle O_2O_1O_3 = \angle O_2O_4O_3$, 从而 $\angle OFA = \angle PFD$.

设 P 在 $\triangle ADF$ 中的等角共轭点是 P', 则 $\angle P'FA = \angle PFD$, 所以 P' 在直线 OF 上. 又

$$\angle P'AD = \angle PAB = \angle PDC = \angle P'DA,$$

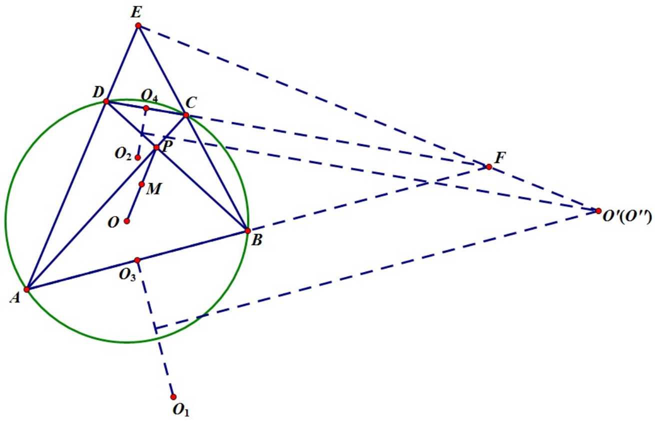
所以 P' 在 AD 的垂直平分线上. 于是 P' 是直线 OF 与 AD 的垂直平分线的交点, 所以 P' 与 O 重合 (直线 AD 与 BC 不平行保证了 OF 与 AD 不垂直).

这样,

$$\angle PDA + \angle PAD = \angle ODC + \angle PAD = 90^\circ,$$

所以 $AC \perp BD$. 此时 O_3, O_4 分别是 AB, CD 的中点.

第二步, 证明 $O^*E \perp OM$.



由 Brocard 定理, $OP \perp EF$, 所以只需证明 O^*在直线 EF 上.

设 O_1O_3 的垂直平分线与直线 EF 交于点 O', O_2O_4 的垂直平分线线与直线 EF 交于点 O''. 只需证明 O' 与 O'' 重合, 这只需证明 $FO' = FO''$.

事实上, 因为

$$FO' = \frac{O_1O_3}{2\sin\angle EFA}, \quad FO'' = \frac{O_2O_4}{2\sin\angle EFD},$$
$$O_1O_3 = \frac{AB}{2\cot\angle O_1AB} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot|\cot\angle AOB|,$$
$$O_2O_4 = \frac{CD}{2\cot\angle O_2DC} = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot|\cot\angle COD|,$$

又 $\angle AOB + \angle COD = 180$, 所以

$$\frac{FO'}{FO''} = \frac{AB}{CD}\cdot\frac{\sin\angle EFD}{\sin\angle EFA}.$$

由正弦定理及$\triangle ECD \sim \triangle EAB$,

$$\frac{\sin\angle EFD}{\sin\angle EFA} = \frac{EC\cdot\frac{\sin\angle ECF}{EF}}{EA\cdot\frac{\sin\angle EAF}{EF}} = \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB},$$

所以

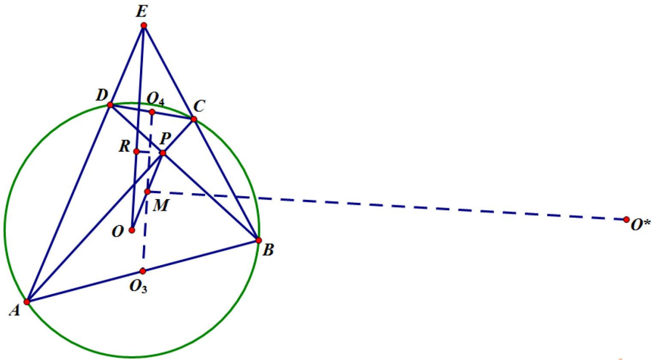
$$\frac{FO'}{FO''} = \frac{AB}{CD}\cdot\frac{CD}{AB} = 1.$$

第三步, 证明 $O^*M \perp OE$.

熟知 OO_3PO_4 是平行四边形, 所以 M 是 O_3O_4 的中点. 这样, $O^*M \perp O_3O_4$, 所以只需证明 $O_3O_4 \parallel OE$.

事实上, 设 $\odot O_3$ 与 $\odot O_4$ 交于点 $P; R$, 则熟知 R 在 OE 上, 且 $OR \perp PR$. 因为 $O_3O_4 \perp PR$, 所以 $O_3O_4 \parallel OR$.

综上, O^* 是 $\triangle OME$ 的垂心. $\square$



评注 这是一道有相当难度的几何问题, 考场上约 5% 的学生做对. 本题的入手点是发现 $AC \perp BD$, 再逐步证明所述圆心 O^* 是 $\triangle OME$ 的垂心. 本题考察了圆的性质、Brocard 定理和三角计算等几何方法和技巧, 对学生的几何综合能力要求较高.