好题与妙解（九）

——2019 年新星夏季精品营两次测试题解析

冷岗松　罗振华　吴尉迟

2019 年 5 月底, 上海数学新星夏季精品营举行了两次测试 (小考). 每次测试四道题, 时间为两个小时 50 分钟. 这两次测验试题较为有趣, 下面就介绍这些试题及给出相应的解答. 我们将用题 1.x 表示第 1 次测试的第 x 题, 题 2.y 的意义类似. 西安交大附中的金磊老师也参与了其中几何题的讨论，在此表示感谢。

I. 试 题

题 1.1 设 $n \geq 16$ 是整数, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1, \quad a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 2.$$

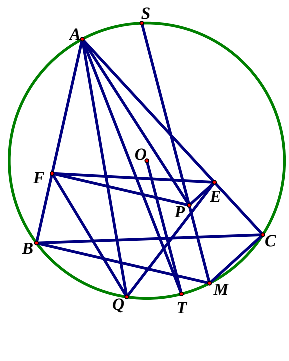
证明:

$$(a_2 - a_1)\sqrt{2} + (a_3 - a_2)\sqrt{3} + \cdots + (a_n - a_{n-1})\sqrt{n} < 0.$$

题 1.2 求所有的正整数 a, b, c, 使得

$$(2^a - 1)(3^b - 1) = c!.$$

题 1.3 点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, 含点 A 的弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点为 S, 点 T 在不包含点 A 的弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上. 点 M 在 $\odot O$ 上且 $SM \parallel OT$. 点 P 在线段 SM 上. 过点 P 作 MB 的平行线交 AB 于点 F; 过点 P 作 MC 的平行线交 AC 于点 E. 点 Q 在 $\odot O$ 上, 使得 AT 是 $\angle PAQ$ 的角平分线. 证明: $QE = QF$.



修订日期: **2019-06-25.**

题 1.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 是一条直线上的线段, 满足

(1) $A_i \bigcap A_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall 1 \leq i \leq n-1$.

(2) $\forall 1 \leq i < j \leq n$, 如果 $i-j$ 是偶数, 则 $A_i \bigcap A_j \neq \emptyset$.

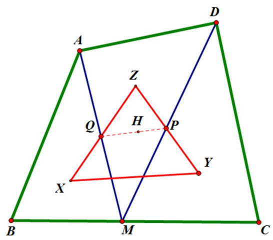
求最大的 $k = k(n)$ 使得存在一点, 它属于至少 k 个线段.

题 2.1 设 x, y, z 是非零复数, 求

$$F = \min\left\{\frac{|x-y|}{|z|}, \frac{|y-z|}{|x|}, \frac{|z-x|}{|y|}\right\}$$

的最大值.

题 2.2 如图, M 为圆外切四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点, X, Y, Z 分别为 $\triangle MAB, \triangle MCD, \triangle MAD$ 内心, XZ 交 AM 于 Q, YZ 交 DM 于 P, H 为 $\triangle XYZ$ 垂心. 证明: P, H, Q 共线.



题 2.3 设图 G 的顶点集为 V, 边集为 E, $|V| = n \geq 5$. 现在用两种颜色染 G 的边 (每条边染且仅染一种颜色), 使得不存在同色的长为 $3, 4, 5$ 的圈. 证明:

$$|E| \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor.$$

题 2.4 设 p 是素数, 序列 $\{u_n\}$ 定义为: 当 $0 \leq n \leq p-1$ 时, $u_n = n$; 当 $n \geq p$ 时, $u_n = p u_{n+1-p} + u_{n-p}$. 证明:

$$v_p(u_n) = v_p(n),$$

其中 $v_p(m)$ 表示使得 $p^k \mid m$ 的最大整数 k.

II. 解 答

题 1.1 设 $n \geq 16$ 是整数, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1, \quad a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 2.$$

证明:

$$(a_2 - a_1)\sqrt{2} + (a_3 - a_2)\sqrt{3} + \cdots + (a_n - a_{n-1})\sqrt{n} < 0.$$

证明 由条件知, $a_1 = a_3 + 2a_4 + \cdots + (n-2)a_n$. 要证不等式等价于

$$\begin{aligned} & -a_1\sqrt{2} + a_2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots + a_{n-1}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) + a_n\sqrt{n} < 0 \\ \Leftrightarrow & -(a_3 + 2a_4 + \cdots + (n-2)a_n)\sqrt{2} + a_2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{n-1}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})+a_n\sqrt{n}<0\\
\Leftrightarrow&a_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})+a_3(\sqrt{3}-\sqrt{4}-\sqrt{2})+a_4(\sqrt{4}-\sqrt{5}-2\sqrt{2})+\cdots+\\
&a_{n-1}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}-(n-3)\sqrt{2})+a_n(\sqrt{n}-(n-2)\sqrt{2})<0.
\end{aligned}$$

注意到当 $n\geq 16$ 时, $\sqrt{n}-(n-2)\sqrt{2}<0$. 故在上式中, $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的系数均小于 0, 故成立. □

评注 这是一道简单的代数题, 约 60% 同学做对此题. 此题只需将 a_1 代入所证不等式, 便可得 $a_i(2\leq i\leq n)$ 的系数均为负数.

题 1.2 求所有的正整数 a,b,c, 使得

$$(2^a-1)(3^b-1)=c!.$$

解 所求 (a,b,c) 为 $(1,1,2),(2,1,3),(2,2,4),(4,2,5),(6,4,7)$.

我们需要用到以下熟知结论, 即升幂定理:

引理 设 $a,n\in\mathbb{N}^*, a>1$, p 为素奇数, 且 $p\mid a-1$, 则

$$v_p(a^n-1)=v_p(a-1)+v_p(n),$$

其中, $v_q(m)$ 表示正整数 m 中所含素数 q 的幂次.

回到原题. 当 $c=1,2$ 时, 经枚举知此时解为 $(a,b,c)=(1,1,2)$.

下设 $c\geq 3$, 则 $3\mid c!$. 又 $(3,3^b-1)=1$, 故 $3\mid 2^a-1$. 从而 $2|a$.

记 $a=2t$ $(t\in\mathbb{N})$. 则由引理知,

$$v_3(2^a-1)=v_3((2^2)^t-1)=1+v_3(t),$$

而

$$v_3(2^a-1)=v_3(c!)=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{c}{3^m}\right].$$

先考虑 $c\geq 9$ 的情形. 则

$$\left[\frac{c}{3^m}\right]\geq\left[\frac{c}{3}\right]+\left[\frac{c}{9}\right]\geq\frac{c-2}{3}+1.$$

从而, $v_3(t)\geq\frac{c-2}{3}$, 故 $t\geq 3^{\frac{c-2}{3}}$. 于是,

$$c!=(2^a-1)(s^b-1)\geq 2^{2\cdot 3^{\frac{c-2}{3}}}.$$

当 $c=9$ 时, 经检验上式不成立. 又对任意 $c\geq 10$, $\frac{c!}{(c-1)!}=c$,

$$\frac{2^{2\cdot 3^{\frac{c-2}{3}}}}{2^{2\cdot 3^{\frac{c-3}{3}}}}=2^{2\cdot 3^{\frac{c-3}{3}}(3^{\frac{1}{3}}-1)}>2^{\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{c-3}{3}}}>c.$$

故该式对任意 $c \geq 9$ 均不成立.

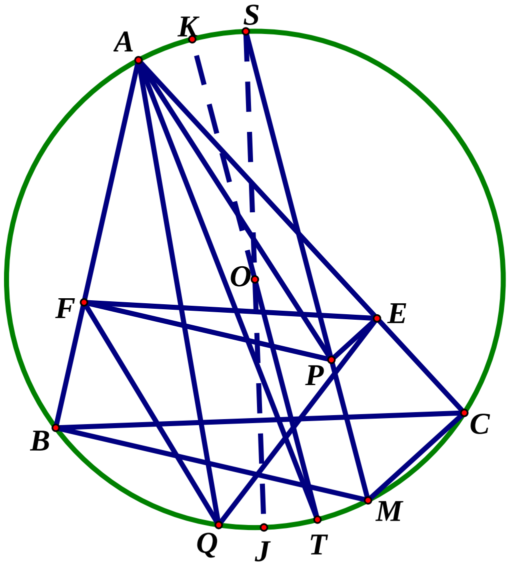
对 $c \leq 8$ 的情况, 枚举即知此时解为 $(2,1,3),(2,2,4),(4,2,5),(6,4,7)$.

综上, 所有解为 $(a,b,c)=(1,1,2),(2,1,3),(2,2,4),(4,2,5),(6,4,7)$. □

评注 此题是中等难度的数论题, 约 33% 的同学做对此题. 此题的关键在于利用升幂定理和勒让德公式对等式两边关于 3 的幂次进行估计, 得到 $c \geq 9$ 时不成立. 对于较小的 c 采取枚举的策略.

值得指出的是, 对等式两边关于 2 的幂次估计, 或同时进行 2, 3 幂次的估计, 都是可行的. 需要注意的是关于素数 2 的升幂定理与奇素数时有所不同, 这是容易混淆的.

题 1.3 点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, 含点 A 的弧 $\overparen{BC}$ 的中点为 S, 点 T 在不包含点 A 的弧 $\overparen{BC}$ 上. 点 M 在 $\odot O$ 上且 $SM \parallel OT$. 点 P 在线段 SM 上. 过点 P 作 MB 的平行线交 AB 于点 F; 过点 P 作 MC 的平行线交 AC 于点 E. 点 Q 在 $\odot O$ 上, 使得 AT 是 $\angle PAQ$ 的角平分线. 证明: $QE=QF$.



证明 因为 $FP \parallel BM$, $EP \parallel CM$, 所以

$$\frac{FB}{PM}=\frac{\sin\angle PMB}{\sin\angle FBM}=\frac{\sin\angle PMC}{\sin\angle ECM}=\frac{EC}{PM},$$

即 $FB=EC$. 又 $SB=SC$ 且 $\angle SBF=\angle SCE$, 故 $\triangle SBF \cong \triangle SCE$. 从而, $SF=SE$.

于是, 要证 $QE=QF$, 只需证 $SQ \perp EF$.

又由 $\triangle SBF \cong \triangle SCE$ 知, $\angle SFA=\angle SEA$, 故 S,A,F,E 四点共圆. 而 $\angle AFP+\angle AEP=\angle ABM+\angle ACE=180^\circ$, 故 A,F,P,E 四点共圆. 从而,

S, A, F, P, E 五点共圆.

$$\begin{aligned}\angle ESQ+\angle SEF &= \angle ESP+\angle PSQ+180^\circ-\angle SAF\\ &= \angle EAP+\angle MAQ+90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC\\ &= \angle EAP+\angle MAT+\angle TAQ+90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC\\ &= \angle EAT+\angle MAT+90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC\\ &= \angle CAT+\angle JAT+90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC\\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

其中, S, T 关于 QO 对径点分别为 J, K. 则 $\overparen{JT}=\overparen{KS}=\overparen{TM}$. 即 $SQ\perp EF$. 从而 $QF=QE$. $\square$

评注 这是一道中等难度的几何题, 考试中约 49% 的同学做对此题. 本解法先通过全等三角形导出 $SE=SF$, 这就把结论转化为证明 $SQ\perp EF$, 只需利用 S, A, F, P, E 五点共圆及导角不难证明此结论.

题 1.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n\geq 2)$ 是一条直线上的线段, 满足

(1) $A_i\bigcap A_{i+1}\neq\emptyset$, $\forall 1\leq i\leq n-1$.

(2) $\forall 1\leq i<j\leq n$, 如果 $i-j$ 是偶数, 则 $A_i\bigcap A_j\neq\emptyset$.

求最大的 $k=k(n)$ 使得存在一点, 它属于至少 k 个线段.

证明 $k_{\max}=\left[\frac{n+3}{2}\right]$.

① 先证 $k_{\max}\geq\left[\frac{n+3}{2}\right]$.

不妨设 $A_1, \cdots, A_n$ 分布在数轴上, A_i 对应区间 $[x_i, y_i]$. 设

$$S_1=\{i\mid 1\leq i\leq n,\ i\text{ 为奇数}\},\ S_2=\{i\mid 1\leq i\leq n,\ i\text{ 为偶数}\}.$$

由条件 (2) 和海莱定理知,

$$\bigcap_{i\in S_1}A_i\neq\emptyset,\ \bigcap_{i\in S_2}A_i\neq\emptyset.$$

取 $a\in\bigcap\limits_{i\in S_1}A_i, b\in\bigcap\limits_{i\in S_2}A_i$. 不妨设 $a\leq b$ ($a>b$ 的情形类似可证), 设 $y_k=\min\limits_{i\in S_1}\{y_i\}$, 那么对任意 $j\in S_1$, 由于 $A_k\bigcap A_j\neq\emptyset$, 故 $x_j\leq a\leq y_k\leq y_j$, 从而 $[a, y_k]\subset A_j$.

对 $k\pm 1\in S_2, b\in A_{k\pm 1}, A_{k\pm 1}\bigcap A_k\neq\emptyset$.

(i) $b>y_k$, 则由 b 定义知, $y_{k\pm 1}\geq b>y_k$, 结合条件 (2) 可得, $x_{k\pm 1}\leq y_k$. 于是, $y_k\in A_{k\pm 1}$, 故 y_k 属于至少 $|S_1|+1=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1=\left[\frac{n+3}{2}\right]$ 条线段.

(ii) $b \le y_k$, 则 $b \in [a, y_k]$, 故由 y_k 的极小性知, $b \in A_i, \forall 1 \le i \le n$. 所以 b 属于至少 $n \ge \left[\frac{n+3}{2}\right]$ 条线段 $(n \ge 2)$.

② 下证 $k_{\max} \le \left[\frac{n+3}{2}\right]$.

记 $t = \left[\frac{n}{2}\right], t \in \mathbb{N}$. 令 $A_{2k-1} = [0, k], A_{2k} = [k, t+1] (k = 1, 2, \cdots, t)$. $A_n = [0, t+1]$ (若 n 为奇数). 先验证该构造满足题设条件

对于 (1), $k \in A_{2k-1} \bigcap A_{2k}$, $[k, k+1] \subset A_{2k} \bigcap A_{2k+1}$ $(k = l, 2, \cdots, t)$.

对于 (2), 若 i, j 同奇, 则 $0 \in A_i \bigcap A_j$; 若 i, j 同偶, 则 $1 \in A_i \bigcap A_j$;

注意到 $[0, t+1]$ 上任意一点, 至多包含在 $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n+3}{2}\right]$ 条线段中. 故 $k \le \left[\frac{n+3}{2}\right]$.

综上, $k_{\max} = \left[\frac{n+3}{2}\right]$. □

评注 这是一道较难的组合题, 考试中约 16% 的同学做对此题. 此题的想法是对下标按奇偶分类, 再由海莱定理可取所有奇下标的 A_i 的公共点 a 和所有偶下标的 A_i 的公共点 b. 再对 a, b 和 A_i 的端点进行位置分析可得 $k_{\max}$ 的下界.

$k_{\max}$ 的上界需要构造例子, 但也并不容易, 一个可行的方案是: 先取一个足够大的闭区间, 令所有奇下标 A_i 均包含该区间左端点, 所有偶下标 A_i 均包含该区间右端点, 这样便保证了条件 (2). 为了使 k 尽可能小和保证条件 (1) 成立, 想法是使某些 A_i, A_{i+1} 的交点恰好一个. 故可取 A_{2k-1}, A_{2k} 恰一个交点, 且奇下标 A_i 右端点严格增, 偶下标 A_i 左端点自然需严格减.

题 2.1 设 x, y, z 是非零复数, 求

$$F = \min\left\{\frac{|x-y|}{|z|}, \frac{|y-z|}{|x|}, \frac{|z-x|}{|y|}\right\}$$

的最大值.

解法 1 设 x, y, z 分别对应复平面的点 X, Y, Z, 则

$$F = \min\left\{\frac{XY}{OZ}, \frac{YZ}{OX}, \frac{ZX}{OY}\right\}.$$

设 $\triangle XYZ$ 的重心为 G. 由重心性质知,

$$\begin{aligned} OX^2 + OY^2 + OZ^2 &= GX^2 + GY^2 + GZ^2 + 3OG^2 \\ &\ge GX^2 + GY^2 + GZ^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(XY^2 + YZ^2 + ZX^2\right), \end{aligned}$$

故 $\frac{XY}{OZ}, \frac{YZ}{OX}, \frac{ZX}{OY}$ 至少有一个不大于 $\sqrt{3}$. 这说明 $F \le \sqrt{3}$.

另一方面, 当 $\triangle XYZ$ 是正三角形且 O 是重心时, $F = \sqrt{3}$. □

解法 2(重庆育才中学刘艺程) 一方面, 取 $(x,y,z)=(1,\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2})$, 有 $F=\sqrt{3}$.

另一方面, 若 $F>\sqrt{3}$, 则 $|x-y|>\sqrt{3}|z|$, 从而

$$(x-y)(\bar{x}-\bar{y})>3z\bar{z}\Leftrightarrow x\bar{x}+y\bar{y}-x\bar{y}-\bar{x}y>3z\bar{z}.$$

同理,

$$y\bar{y}+z\bar{z}-y\bar{z}-\bar{y}z>3x\bar{x},\ z\bar{z}+x\bar{x}-z\bar{x}-\bar{z}x>3y\bar{y}.$$

三式相加得,

$$\begin{aligned}&x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}+x\bar{y}+\bar{x}y+y\bar{z}+\bar{y}z+\bar{x}z+x\bar{z}<0\\ \Leftrightarrow&(x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})<0.\end{aligned}$$

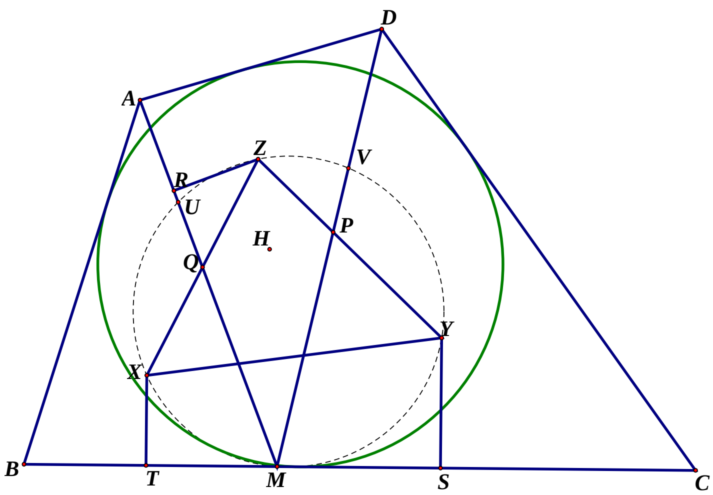
即 $|x+y+z|^2<0$, 矛盾.

综上知, $F_{\max}=\sqrt{3}$. □

评注 此题是中等偏易的几何不等式题, 考试中约 43% 的同学做对. 此题的关键是从几何的观点出发, 先猜出取等条件, 再利用平均值原理(或者反证法)给出证明: 证 1 利用重心的性质和平均值原理给出了证明; 证 2 通过复数运算给出了一个漂亮的证明.

此题也可以分别设出 x,y,z 的实部和虚部, 进行类似于证 2 的运算可以得到结论; 抑或分别设出 x,y,z 的模长和辐角, 利用嵌入不等式来证明.

题 2.2 如图, M 为圆外切四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点, X,Y,Z 分别为 $\triangle MAB,\triangle MCD,\triangle MAD$ 内心, XZ 交 AM 于 Q, YZ 交 DM 于 P, H 为 $\triangle XYZ$ 垂心. 证明: P,H,Q 共线.



证明 (湖南省雅礼中学白鹏飞) 如图所示, 过 X, Y, Z 分别做 BM, MC, AM 的垂线, 垂足分别为 T, S, R. 由内切圆性质, 得

$$MR=\frac{MA+MD-AD}{2}, MT=\frac{MA+MB-AB}{2}, MS=\frac{MD+MC-CD}{2}.$$

因为四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形, 所以 $AB+CD=AD+BC$, 故

$$MT+MS=\frac{MA+MD+BC-AB-CD}{2}=\frac{MA+MD-AD}{2}=MR.$$

由 ZM, XM, YM 分别为 $\angle AMB, \angle AMD, \angle DMC$ 的角平分线知,

$$MX\cdot\sin\angle YMZ=MX\cdot\sin(90^\circ-\angle XMT)=MX\cdot\sin\angle MXT=MT.$$

同理, $MY\cdot\sin\angle XMZ=MS$, $MZ\cdot\sin\angle XMY=MR$. 又 $MR=M+MS$, 故

$$MZ\cdot\sin\angle XMY=MX\cdot\sin\angle YMZ+MY\cdot\sin\angle XMZ,$$

由三弦定理, M, X, Z, Y 四点共圆. 设该圆为 ω, 且分别交 MA, MD 于 U, V, 则 $\angle VXZ=\angle ZMV$, 又

$$\angle HXZ=90^\circ-\angle XZY=90^\circ-(\angle XMB+\angle YMC)=\angle ZMV,$$

故 X, H, V 三点共线. 同理, R, H, Y 三点共线, 所以 H 为 XV, YU 的交点. 对圆内接六边形 $XZYUMV$ 应用帕斯卡定理得 P, H, Q 三点共线. $\square$

评注 此题是中等偏难的几何题, 考试中约 18% 的同学做对. M, X, Z, Y 四点共圆其实是 2018 保加利亚数学奥林匹克第四题, 用三弦定理证来证明是比较简洁的做法, 然后注意到 P, H, Q 是一个圆内接六边形三组对边的交点, 使用 Pascal 定理即可证得结论.

题 2.3 设图 G 的顶点集为 V, 边集为 E, $|V|=n\geq 5$. 现在用两种颜色染 G 的边 (每条边染且仅染一种颜色), 使得不存在同色的长为 $3, 4, 5$ 的圈. 证明:

$$|E|\leq\lfloor\frac{n^2}{3}\rfloor.$$

证明 只需证: 若 G 为 $n(n\geq 5)$ 阶简单图, 且无长为 $3, 4, 5$ 的圈, 则 G 的边数 $\leq\frac{n^2}{6}$. $(*)$

当 $n=5$ 时, 由 G 中无长为 $3, 4, 5$ 的圈知, G 中无圈, 故

$$G\text{ 的边数 }\leq n-1=4\leq\frac{n^2}{6}.$$

当 $n=6$ 时, 假设 G 的边数 $>\frac{n^2}{6}$, 即 G 中至少 7 条边, 则 G 中有圈, 结合 G 中无长为 $3, 4, 5$ 的圈知, 此圈长为 6. 此时, 第 7 条边与此圈比可产生一个长为

2、4 或 5 的圈, 矛盾.

假设结论对 $n-1(n\ge 7)$ 成立, 下考虑 n 的情形.

设 G 的边数为 e. 对 G 中任一点, 由归纳假设, G 删去 v 及 v 相连的边后, G 的边数 $\le \frac{(n-1)^2}{6}$. 所以 v 的度 $d(v)\ge e-\frac{(n-1)^2}{6}$.

于是, $2e=\sum\limits_{v\in G} d(v)\ge n(e-\frac{(n-1)^2}{6})$, 得

$$e\le \frac{n(n-1)^2}{6(n-2)}=\frac{n^2+\frac{n}{n-2}}{6}<\frac{n^2+2}{6},$$

又 $\frac{n^2+1}{6}\notin \mathbb{Z}$, 故 $e\le \frac{n^2}{6}$. $(*)$ 得证. □

评注 此题是中等偏难的组合题, 考试中约 18% 的同学做对. 此题的关键是步骤是转化为证明无 $3,4,5$ 圈的图的边数 $\le \frac{n^2}{6}$. 然后再利用归纳法证明结论. 在图论题的归纳过渡中, 删去顶点或边是常规的想法, 本题中是删去顶点, 利用归纳假设进行论证.

题 2.4 设 p 是素数, 序列 $\{u_n\}$ 定义为: 当 $0\le n\le p-1$ 时, $u_n=n$; 当 $n\ge p$ 时, $u_n=pu_{n+1-p}+u_{n-p}$. 证明:

$$v_p(u_n)=v_p(n),$$

其中 $v_p(m)$ 表示使得 $p^k\mid m$ 的最大整数 k.

证法一 先证明:

$$v_p(n!)\le n-1,\ 且当\ p>2\ 和\ n>1\ 时,\ v_p(n!)<n-1. \tag{$*$}$$

事实上, 设 $n=\sum\limits_{l=0}^{m} a_l p^l$, 其中 $0\le a_l<p$, 则

$$\begin{aligned}v_p(n!)&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{m}a_lp^{l-k}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}a_lp^k\\&=\sum_{l=1}^{m}\frac{a_lp^l-a_l}{p-1}=\frac{n-S_p(n)}{p-1}\le n-1,\end{aligned}$$

其中 $S_p(n)$ 表示 n 在 p 进制下的数码和. 当 $p>2, n>1$ 时, 上述不等式无法取等.

再证:

$$u_{j+ip}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}p^ku_{j+k}, \forall i,j\ge 0. \tag{$**$}$$

对 i 用归纳法. $i=0$ 时, 显然成立. 假设结论小于 $i-1(i\ge 1)$ 时成立, 则

$$u_{j+ip}=u_{j+(i-1)p}+pu_{j+1+(i-1)p}$$

$$= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} p^k u_{j+k} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} p^{1+k} u_{j+1+k}$$
$$= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} p^k u_{j+k} + \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} p^k u_{j+k} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} p^k u_{j+k},$$

i 时, 结论仍成立.

下证 $v_p(u_n) = v_p(n), \forall n \geq 1$.

(1) 当 $1 \leq j < p$ 时, 有 $v_p(u_j) = v_p(j) = 0$. 对 $i \geq 1$, 由

$$u_{j+ip} = u_j + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} p^k u_{j+k}$$

知, $v_p(u_{j+ip}) = v_p(u_j) = 0 = v_p(j+ip)$.

(2) 当 $j = 0$ 时, 由 $u_0 = 0, u_1 = 1$ 知

$$u_{0+ip} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} p^k u_k = ip + \sum_{k=2}^{i} \binom{i}{k} p^k u_k.$$

若 $p > 2$, 则对 $k > 1$, 由 $(*)$ 知,

$$v_p\left(\binom{i}{k} p^k u_k\right) \geq v_p(i) - v_p(k!) + k > v_p(i) - k + 1 + k = v_p(ip),$$

结合上述两上式知,

$$v_p(u_{ip}) = v_p\left(ip + \sum_{k=2}^{i} \binom{i}{k} p^k u_k\right) = v_p(ip).$$

若 $p = 2$. 对 $k = 2$, 我们有

$$v_2\left(\binom{i}{2} 2^2 u_2\right) \geq v_2(i) - 1 + 2 + 1 = v_2(2i) + 1.$$

对 $k > 2$, 我们有

$$v_2\left(\binom{i}{k} 2^k u_k\right) \geq v_2(i) + v_2((i-1)(i-2)) - v_2(k!) + k$$
$$\geq v_2(i) + 1 - k + 1 + k = v_2(2i) + 1.$$

于是, 结合 $(**)$ 知,

$$v_2(u_{2i}) = v_2\left(2i + \binom{i}{2} 2^2 u_2 + \sum_{k=3}^{i} \binom{i}{k} 2^k u_k\right) = v_2(2i). \qquad \square$$

证法二 (浙江省杭州二中黄启昀) 先证明: 若 $p \nmid$, 则 $p \nmid u_n$.

事实上, 设 $n = pi + j, 0 < j \leq p-1$, 则

$$u_n = pu_{n+1-p} + u_{n-p} \equiv u_{n-p} \equiv \cdots \equiv u_j = j \not\equiv 0 \pmod p.$$

下证: $v_p(u_{tp^\alpha}) = v_p(tp^\alpha) = \alpha$, 其中 $(t, p) = 1$. $\qquad (*)$

引理 1 对任意非负整数 n, 均有 $p^\alpha \mid u_{n+p^\alpha} - u_n$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, .

引理 1 的证明　对 α 用归纳法.

$\alpha=1$ 时, 由题设条件知成立.

设 $(*)$ 对 $\le \alpha-1(\alpha\ge 2)$ 时成立, 下证 α 时的情形. 由归纳假设 $u_{n+p^i}\equiv u_i \pmod{p^i}, \forall 1\le i\le \alpha-1$ 知,

$$\begin{aligned}u_{n+p^\alpha}-u_n&=p\left(u_{n+1}+u_{n+1+p}+\cdots+u_{n+p^\alpha-p+1}\right)\\&\equiv p\left(p\left(u_{n+1}+u_{n+p+1}+\cdots+u_{n+p^{\alpha-1}-p+1}\right)\right)\\&\equiv p(u_{n+p^{\alpha-1}}-u_n)\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.\end{aligned}$$

引理 2　对非负整数 n,α, 有

$$u_{n+p^\alpha}-u_n\equiv u_{n+p+p^\alpha}-u_{n+p} \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

引理 2 的证明　$\alpha=0$ 时显然成立. 当 $\alpha\ge 1$ 时, 注意到

$$u_{i+p^\alpha}-u_i=p\left(u_{i+1}+u_{i+p+1}+\cdots u_{i+p^\alpha-p+1}\right), \forall i\in\mathbb{N}.$$

在上式中, 分别取 $i=n+p$ 和 $i=n$ 并相减可知, 引理 2 结论等价于

$$pu_{n+1}\equiv pu_{n+p^\alpha+1} \pmod{p^{\alpha+1}} \Leftrightarrow u_{n+1}\equiv u_{n+p^\alpha+1} \pmod{p^\alpha},$$

由引理 1 便知上式成立, 从而引理 2 成立.

回到 $(*)$ 的证明.

① 当 $p\ge 3$ 时, 对任意正整数 m,t,α, 由引理 1 可知

$$p^{\alpha-1}\mid u_{m+tp^{\alpha-1}}-u_{m+(t-1)p^{\alpha-1}},$$

结合引理 2 可知, 存在常数 $c_m\in\mathbb{N}$, 对任意正整数 t, 有

$$u_{m+tp^{\alpha-1}}-u_{m+(t-1)p^{\alpha-1}}\equiv c_m p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}.$$

进而, $u_{m+tp^{\alpha-1}}\equiv u_m+tc_mp^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}$. 于是,

$$\sum_{t=0}^{p-1}u_{m+tp^{\alpha-1}}\equiv pu_m+c_m\left(\sum_{t=0}^{p-1}t\right)p^{\alpha-1}\equiv pu_m \pmod{p^\alpha}.$$

从而, 对 $\alpha\ge 2$, 有

$$\begin{aligned}u_{p^\alpha}-u_0&=p\left(\left(\sum_{i=1}^{p^{\alpha-2}}u_{(i-1)p+1}\right)p+\sum_{i=1}^{p^{\alpha-2}}\sum_{t=0}^{p-1}\left(u_{(i-1)p+1+tp^{\alpha-1}}-u_{(i-1)p+1}\right)\right)\\&\equiv p\left(u_{p^{\alpha-1}}-u_0\right) \pmod{p^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

结合 $u_p=p$ 可知, $v_p(u_{p^\alpha})=\alpha, \forall\alpha\ge 2$.

进一步, 由引理 2, 对与 p 互素的整数 t 有

$$u_{tp^\alpha}\equiv u_{p^\alpha}+u_{(t-1)p^\alpha}-u_0\equiv\cdots\equiv tu_{p^\alpha}-tu_0\not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

又由引理 1,

$$u_{tp^\alpha} \equiv t(u_{p^\alpha} - u_0) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

故 $v_p(u_{tp^\alpha}) = \alpha$. 这说明当 $p \geq 3$ 时, 结论成立.

② 当 $p = 2$ 时, 易知

$$4 \mid u_{n+2} - u_n (n \text{ 为奇数}) \text{ 且 } u_4 - u_0 \equiv 2\,(u_2 - u_0) \pmod{8}.$$

对 $\alpha \geq 3$, 由引理 1,2, 对奇数 n, 可设

$$u_{n+p^{\alpha-1}} - u_n \equiv cp^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha},$$

其中 $c \in \mathbb{N}$ 为常数. 从而

$$\begin{aligned} u_{p^\alpha} - u_0 &= p\left(\left(\sum_{i=1}^{p^{\alpha-2}} u_{(i-1)p+1}\right)p + \sum_{i=1}^{p^{\alpha-2}} \sum_{t=0}^{1} \left(u_{(i-1)p+1+tp^{\alpha-1}} - u_{(i-1)p+1}\right)\right) \\ &\equiv p\left((u_{p^{\alpha-1}} - u_0) + p^{\alpha-2}cp^{\alpha-1}\right) \\ &\equiv p\,(u_{p^{\alpha-1}} - u_0) \pmod{p^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

与 $p \geq 3$ 类似可证 $(*)$. □

评注 此题是较难的数论题, 考试中约 5% 的同学做对. 此题中的 a_n 很难求出具体的通项公式. 可行的想法是通过递归的想法. 证 1 将 u_n 由前面的若干项表示出来, 并且系数含素数 p 的幂次容易计算. 上述的解法, 将 u_{j+ip} 用 $u_{j+k}(0 \leq k \leq i)$ 表出, 再利用该递推公式进行幂次的计算可得结论.

证 2 先考虑下标不被 p 整除的简单情形. 对于下标被 p 整除的情形, 关键是证明 $u_{p^\alpha} - u_0 \equiv p\,(u_{p^{\alpha-1}} - u_0) \pmod{p^{\alpha+1}}$, 由 $u_0 = 0, u_p = p$ 可得 $v_p(u_{p^\alpha}) = \alpha$, 再考虑一般的 $u_{tp^\alpha}(t, p$ 互素$)$ 即可.