2019 年清华“飞测”数学试题解析

羊明亮

(浙江省乐清知临中学, 325600)

2019 年 6 月 1 日, 清华大学在浙江, 上海, 湖南, 广州等地举行了数学“飞测”, 其题目新颖, 难度适当. 下面我们给出这次飞测试题, 解答及短评, 供大家参考.

I. 试 题

1. 给定以 O 为圆心的圆周 $\odot O$, 求正整数 n 的最大值, 使得存在圆内两个不同的点 A, B 以及圆周上 n 个不同的点 $P_1, \ldots, P_n$, 使得 OP_i 平分 $\angle AP_iB$. 特殊地,当 B 在射线 PA 上, O 也在射线 PA 上时, 称 OP 平分 $\angle APB$.

2. 给定 n, k 为正整数. 设 $x_1, \ldots x_n$ 为 $(0,1)$ 中的互异实数, 求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i - x_j\}^k$$

的最小值. 其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 即 $\{x\} = x - [x]$, $[x]$ 为不大于 x 的最大整数.

3. 给定一个关于 x, y, z 的实系数多项式

$$f(x,y,z) = \sum_{i,j,k\in\mathbb{N}} C_{i,j,k}x^iy^jz^k,$$

其中 $C_{i,j,k}$ 中只有有限项不为 0. 记其次数 $d = \max\{i+j+k \mid C_{i,j,k} \neq 0\}$, 对于任一实数集 A, 定义 $S = \{(x,y,z) \in A^3 | f(x,y,z) = 0\}$. 求证: 若 $d > 0$, 则 $|S| \le d|A|^2$.

4. 给定有限集 X, 设 $A_1, \ldots, A_n$ 为 X 的互异子集 ($n \in \mathbb{N}^*$), 定义

$$b_k = |\{x \in X \mid x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k},\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n\}|,\ 1 \le k \le n.$$

证明: $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k \le \prod\limits_{k=1}^{n} |A_k|$.

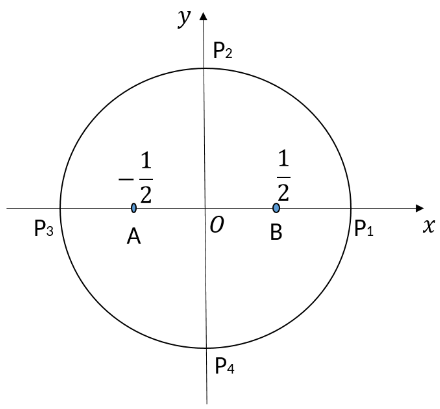
修订日期: 2019-06-30.

II. 解答与评注

题 1 给定以 O 为圆心的圆周 $\odot O$, 求正整数 n 的最大值, 使得存在圆内两个不同的点 A, B 以及圆周上 n 个不同的点 $P_1, \ldots, P_n$, 使得 OP_i 平分 $\angle AP_iB$. 特殊地,当 B 在射线 PA 上, O 也在射线 PA 上时, 称 OP 平分 $\angle APB$.

解 所求 n 为 4.

以 O 为原点, $\odot O$ 半径为单位长度, 建立如下复平面. 并以各点的小写字母表示它们对应的复数. 即点 A 对应的复数为 a, 点 B 对应的复数为 b, 点 P_i 对应的复数为 p_i.



一方面, 取 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$, 则对 $p_1 = 1, p_2 = \mathrm{i}, p_3 = -1, p_4 = -\mathrm{i}\ \ (\mathrm{i} = \sqrt{-1})$ 这四个复数所对应的点 $P_j (1 \leq j \leq 4)$ 均满足 OP_j 平分 $\angle AP_jB$. 故 $n = 4$ 可以取到.

另一方面, 注意到: 对 $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
OP_j \text{ 平分 } \angle AP_jB &\Leftrightarrow \measuredangle AP_jO = \measuredangle OP_jB \\
&\Leftrightarrow \arg\frac{p_j - a}{p_j} = \arg\frac{p_j}{p_j - b} \\
&\Leftrightarrow \frac{(p_j - a)(p_j - b)}{p_j^2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{(p_j - a)(p_j - b)}{p_j^2} = \frac{\overline{(p_j - a)(p_j - b)}}{\overline{p_j^2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{(p_j - a)(p_j - b)}{p_j^2} = (1 - \overline{a}p_j)(1 - \overline{b}p_j) \\
&\Leftrightarrow \overline{ab}p_j^4 - (\overline{a} + \overline{b})p_j^3 + (a + b)p_j - ab = 0,
\end{aligned}$$

故 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 均为方程

$$\overline{ab}x^4 - (\overline{a} + \overline{b})x^3 + (a + b)x - ab = 0$$

的根, 因为 a, b 不全为 0, 则该方程不恒成立, 故 $n \leq 4$.

综上, 所求 n 的最大值为 4. $\square$

评注 此题笔者暂时还不知道纯平几解法, 复数计算是自然的, 因为角平分线用复数较容易表示.

题 2 给定 n,k 为正整数. 设 $x_1,\dots x_n$ 为 $(0,1)$ 中的互异实数, 求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i-x_j\}^k$$

的最小值. 其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 即 $\{x\}=x-[x]$, $[x]$ 为不大于 x 的最大整数.

解 所求解为

$$\frac{1^k+2^k+\dots+(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

一方面, 取

$$x_i=\frac{2i-1}{2n},\ i=1,2,\dots,n.$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i-x_j\}^k&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\{x_i-x_{i+t}\}^k\quad(\text{下标模 }n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left\{-\frac{t}{n}\right\}^k\\&=n\sum_{t=1}^{n-1}\left(-\frac{t}{n}+1\right)^k+0\quad(t=n\text{ 时, }\{-\frac{t}{n}\}=0)\\&=\frac{1^k+2^k+\dots+(n-1)^k}{n^{k-1}}.\end{aligned}$$

故 $\frac{1^k+2^k+\dots+(n-1)^k}{n^{k-1}}$ 可以取到.

另一方面, 我们证明: 对于任意 $x_1,\dots x_n$ 为 $(0,1)$ 中的互异实数,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{x_i-x_j\}^k\ge\frac{1^k+2^k+\dots+(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

由对称性, 不妨设 $x_1<x_2<\dots<x_n$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{n-1}\{x_{i+t}-x_i\}^k\qquad(\text{下标模 }n)\\&\ge n\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\{x_{i+t}-x_i\}}{n}\right)^k\qquad(\text{幂平均不等式})\\&=n\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\{x_{i+t}-x_i\}}{n}\right)^k\end{aligned}$$

$$= n\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-t}(x_{i+t}-x_i)+\sum\limits_{i=n-t+1}^{n}(1+x_{i+t}-x_i)}{n}\right)^k$$

$$= n\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{n-t}{n}\right)^k = \frac{1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

综上, 所求解为

$$\frac{1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

□

评注 此题属于简单题, 关键在于用一种"将 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 置于圆周上"的观点来看待原式中的小数部分.

题 3 给定一个关于 x, y, z 的实系数多项式

$$f(x,y,z)=\sum_{i,j,k\in\mathbb{N}} C_{i,j,k}x^iy^jz^k,$$

其中 $C_{i,j,k}$ 中只有有限项不为 0. 记其次数 $d=\max\{i+j+k \mid C_{i,j,k}\neq 0\}$, 对于任一实数集 A, 定义 $S=\{(x,y,z)\in A^3 | f(x,y,z)=0\}$. 求证: 若 $d>0$, 则 $|S|\leq d|A|^2$.

证明 我们证明如下更一般的结论.

对于 $n\in\mathbb{N}^+$ 及 n 元非零实系数多项式

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{N}} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

($C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ 中只有有限项不为 0), 记 $\deg f=\max\{\alpha_1+\ldots+\alpha_n | C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\neq 0\}$, 对于任一有限实数集 A, 定义 $S=\{(x_1,\ldots,x_n)\in A^n | f(x_1,\ldots,x_n)=0\}$, 则

$$|S|\leq \deg f\cdot |A|^{n-1}. \tag{*}$$

原题即为 $(*)$中 $n=3$, $\deg f>0$ 的情形.

$(*)$ 的证明: 对 n 归纳.

当 $n=1$ 时, 即"一元 d 次非零实系数方程至多 d 个不同实根", 显然成立.

假设 $n=m(m\in\mathbb{N}^+)$ 时结论成立.

当 $n=m+1$ 时, 以下通过对 $\deg f$ 进行归纳证明, 从而证明命题成立.

当 $\deg f=0$ 时结论明显成立.

假设 $\deg f=k(k\in\mathbb{N}^+)$ 时结论成立, 那么当 $\deg f=k+1$ 时, 我们需证明: 对于 $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}\in A$, 则

$$|S|\leq (k+1)\cdot |A|^m.$$

以下分两种情形讨论:

(1) 若对 $x \in A$, 记 $f_x(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_m, x)$, 且 $f_x(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 均不为零多项式, 由 $n = m$ 时的归纳假设可知,

$$|\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A^m \mid f_x(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0\}| \leq (k+1)|A|^{m-1}.$$

故

$$|S| \leq |A| \cdot (k+1) \cdot |A|^{m-1} = (k+1)|A|^m.$$

结论成立.

(2) 若存在 $x_0 \in A$, $f_{x_0}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 为零多项式, 那么

$$(x_{m+1} - x_0) \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}),$$

记

$$f^*(x_1, \ldots x_{m+1}) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_{m+1})}{x_{m+1} - x_0},$$
$$S^* = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \in A^{m+1} | f^*(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = 0\},$$

可知 $\deg f^* = \deg f - 1$. 由归纳假设可知,

$$|S^*| \leq k|A|^m.$$

又由

$$S \subseteq S^* \cup \{(x_1, \ldots, x_m, x_0) \mid x_1, x_2, \cdots, x_m \in A\},$$

则

$$|S| \leq (k+1)|A|^m,$$

故结论成立.

综合 (1), (2) 知, $\deg f = k+1$ 时, $n = m+1$ 的结论成立, 即 $(*)$ 成立.

特别地, 原命题成立, 证毕! □

评注 此题需特别小心零多项式情形, 这导致给定 x, y 后可能不止 d 个 z 使 $f(x, y, z) = 0$, 意识到这一点后此题思路十分清晰.

对一般的多元多项式 $g(x, y, z)$ 和 $f(x, y, z)$, 是无法在"对满足 $g(x, y, z) = 0$ 的实数解 (x, y, z) 均有 $f(x, y, z) = 0$"的条件下推出 $g(x, y, z) \mid f(x, y, z)$, 这一点需要小心.

题 4 给定有限集 X, 设 $A_1, \ldots, A_n$ 为 X 的互异子集 $(n \in \mathbb{N}^*)$, 定义

$$b_k = \left|\{x \in X \mid x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k},\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}\right|,\ 1 \leq k \leq n.$$

证明: $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k \le \prod\limits_{k=1}^{n} |A_k|$.

证明 记 $a_k = |A_k|, k = 1, 2, \ldots, n$. 不妨设 $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$, 记

$$T_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

对 $x \in T_k$, 记

$$d_k(x) = |\{i | 1 \le i \le k, x \in A_i\}|.$$

下面我们证明: 对 $1 \le k \le n$,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_k. \qquad (*)$$

事实上, 对 $1 \le i \le k$, b_i 不小于出现在 $A_1, \ldots A_k$ 中至少 i 个集合的元素的个数, 即 $b_i \ge |\{x | d_k(x) \ge i\}|$. 故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} b_i &\ge \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x \in T_k, d_k(x) \ge i} 1 \right) = \sum_{x \in T_k} d_k(x) \\ &= \sum_{x \in T_k} \sum_{x \in A_i} 1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in A_i} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i.\end{aligned}$$

$(*)$ 证毕. 并且由 $(*)$ 证明过程知

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

下记

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, \quad R_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, 1 \le k \le n,$$

则 $S_k \ge R_k$. 原不等式在 $a_n = 0$ 时显然成立, 此时 $b_n = 0$.

当 $a_n > 0$ 时, $a_1 \ldots a_n > 0$, 要证明原不等式成立, 即证明

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k} \le 1,$$

只需证明

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k} \le n.\ (\text{A} - \text{G 不等式})$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}) S_k + \frac{S_n}{a_n} \quad (\text{Abel 公式})$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})R_k+\frac{R_n}{a_n} \quad (a_k \ge a_{k+1}, R_n=S_n, R_k \le S_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k} \quad (\text{Abel 公式})$$
$$=n=\text{右式}.$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\le n$ 成立, 故

$$\prod_{k=1}^{n} b_k \le \prod_{k=1}^{n}|A_k|$$

成立. 证毕! □

评注 此题后半部分证明原不等式的方法类似于优超不等式的证明. 事实上 $(*)$ 即优超条件, 原不等式为优超不等式的特例.

此题也可利用优化一步到位.

首先, 基于集合与元素的对偶观点, 记 $T=A_1\cup\ldots\cup A_n$, 并对 $x\in T$, 记 $C(x)=\{i|x\in A_i\}$. 则 $b_k=|\{x\in T||C(x)|\ge k\}|$. 类似于原解答知,

$$b_1+\ldots+b_n=a_1+\ldots+a_n.$$

对 $x,y\in T$,

$$|C(x)|\le|C(y)|.$$

若 $C(x)\setminus C(y)\ne\emptyset$, 设 $j\in C(x)\setminus C(y)$, 即 $x\in A_j, y\notin A_j$. 那么, 将 A_j 中元素 x 改为 y, 并设

$$|C(x)|=a,|C(y)|=b.$$

则变化后 $|A_1|,\ldots,|A_n|$ 不变, b_a 减 1, b_{b+1} 加 1, 其余 b_k 不变, 有 $b_1b_2\cdots b_n$ 增大 (因变化后 b_a不小于 b_{b+1}).

故可不妨设: 若 $|C(x)|\le|C(y)|$, 则 $C(x)\subseteq C(y)$.

如此易知, 不妨设 $|A_1|\ge|A_2|\ge\ldots\ge|A_n|$, 则 $|A_i|=b_i, 1\le i\le n$, 原命题显然成立.

有时组合上的优化因更好地利用了组合意义, 比代数上的调整更为有力.