数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

平面中心对称凸形的一个判准

韩新淼[1] 刘畅[2]
(1. 浙江省乐清知临中学, 325600; 2. 上海大学, 200444)

I. 引 言

在平面几何中, 中心对称是一个十分常见且重要的性质. 对于平面上的中心对称图形, 我们可以将其分成全等的两部分, 并且形状可以十分多变. 那么, 反过来, 如果能分成全等的两部分, 能不能判定中心对称? 又或者, 需要再加上点什么? 联系到组合几何中常用的凹凸性, 我们提出了下面这个问题, 得到了两个定理.

本文考虑的图形均满足其边界为简单闭曲线 (即不自交的闭曲线), 并且在下面的讨论中规定: 一个点在一个图形中包括该点在此图形边界上的情况.

II. 主要结果及其证明

本文得到以下两个定理:

定理 1 如果平面上一个凸形可以用一条不自交的曲线 (此曲线两端在凸形边界上, 且其余部分严格位于凸形内部) 划分为两部分, 满足这两部分非凸且顺向全等, 则原凸形为中心对称图形.

平面上两个图形为 **顺向全等的**, 如果可以将一个图形经过平移、旋转得到另一个. 进一步考虑若将定理 1 中的顺向全等改为一般全等, 结论是否成立? 通过举出反例, 我们得到定理 2.

定理 2 将定理 1 中的顺向全等改为一般全等, 结论是否定的.

平面上两个图形为**一般全等的**, 如果可以将一个图形经过平移、旋转、翻折得到另一个.

修订日期: 2019-05-23.

为证明定理 1, 我们引入以下引理.

引理 如果平面上两个图形为顺向相似的, 则可以将一个仅经过一次平移或旋转得到另一个.

证明 建立复平面 $\mathbb{C}$, 对每个平面上的图形 A, 记 $Z(A)$ 为 A 所含所有点对应的复数构成的集合. 则对平面上两个图形 A 和 B:

A 可经过一次平移得到 B $\Leftrightarrow$ 存在 $c\in\mathbb{C}$, $Z(A)+c=Z(B)$.

A 可经过一次旋转得到 B $\Leftrightarrow$ 存在 $t,\alpha\in\mathbb{C}$ 满足 $|\alpha|=1$, 使

$$(Z(A)-t)\cdot\alpha+t=Z(B).$$

$\Leftrightarrow$ 存在 $t,\alpha\in\mathbb{C}$ 满足 $|\alpha|=1$, 且不同时有 $\alpha=1$ 与 $t\neq 0$, 使

$$\alpha\cdot Z(A)+t=Z(B).$$

因此, A 可经过一次平移或旋转得到 B $\Leftrightarrow$ 存在 $t,\alpha\in\mathbb{C}$ 满足 $|\alpha|=1$, 使

$$\alpha\cdot Z(A)+t=Z(B). \tag{$*$}$$

对平面上两图形 A 和 B, 若它们顺向相似, 则 A 可经过若干次平移、旋转得到 B. 由 $(*)$ 知, 存在 $P_0=Z(A),\ P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},P_n=Z(B)\in\mathbb{C}$ 及 $t_1,\cdots,t_n$, $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$, 使

$$P_{i-1}\cdot\alpha_i+t_i=P_i,\ \ i=1,\cdots,n.$$

用 P_0 及 $t_1,\cdots,t_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表示 $P_1,\cdots,P_n$, 可知

$$P_n=\alpha_1\cdots\alpha_n\cdot P_0+T\ \ (T\in\mathbb{C}),$$

即

$$Z(B)=\alpha\cdot Z(A)+T,$$

其中 $\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_n$, 且满足 $|\alpha|=1$. 故由 $(*)$ 知, A 可仅经过一次平移或旋转得到 B. □

定理 1 证明 记原凸形为 S, 划分成的两部分为 A 和 B. 由引理知 A 可仅经过一次平移或旋转得到 B. 故我们分以下两种情况讨论:

(i) A 可经过一次平移得到 B.

因为 A 为非凸的, 所以可找到 A 的一条支撑线 l_1, 满足 l_1 上 A 的边界上的部分不为连续的. 即 l_1 上有三点 X_1,Y_1,Z_1 满足 Y_1 在线段 X_1Z_1 上, 且 X_1,Z_1 在 A 的边界上, Y_1 不在 A 的边界上, 如图 1 所示.

考虑由 A 到 B 的平移. 设此过程中 l_1,X_1,Y_1,Z_1 变成了 l_2,X_2,Y_2,Z_2, 则

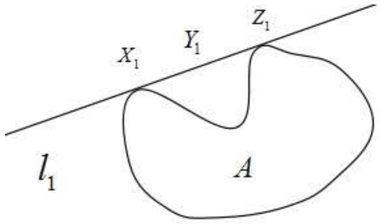

图 1

$l_1 /\!/ l_2$ (或重合).

若 l_1 与 l_2 不重合, 则必有 l_1, B 在 l_2 异侧或 l_2, A 在 l_1 异侧之一成立. 不防设为前者. 考虑点 Y_1, 其不在 A 中, 也不在 B 中. 而由 X_1, Z_1 在 S 中及 S 为凸的可知线段 X_1Z_1 上的点 Y_1 在 S 中. 矛盾! 故 l_1 和 l_2 重合.

取 X_1, Z_1 为 l_1 上 A 的边界上的部分中距离最远的两点. X_2, Z_2 同理. 可取一条连接 X_1, Z_1, 且除 X_1, Z_1 处严格位于 A 内部的曲线, 记为 m_1. 同理作 m_2.

若 m_1, m_2 相交于内部 (即不包括交点为 X_1, Z_1, X_2, Z_2 的情形), 设交点为 P (如图 2 所示). 则 P 既在 A 的内部, 又在 B 内部, 矛盾! 故 m_1, m_2 不相交于内部. 从而在 l_1 (即 l_2) 上, 线段 X_1Z_1 与 X_2Z_2 无公共内点.

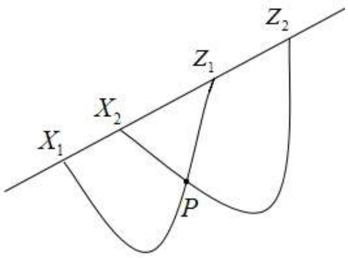

图 2

此时, 考虑 Y_1, 既不在 A 中, 也不在 B 中. 而由 X_1, Z_1 在 S 中及 S 为凸的可知线段 X_1Z_1 上的点 Y_1 在 S 中, 矛盾!

(ii) A 可经过一次旋转得到 B. 设上述旋转的中心为 O.

(1) 若 O 在 A 内部, 则 O 也在 B 内部, 矛盾!

(2) 若 O 在 A 外部, 则 O 也在 B 外部. 设 A 中到 O 距离最近的点为 P. 设从 A 到 B 的旋转中, P 变为了 Q. 易知 $P \neq Q$ (否则 A, B 重合). 设 R 为 PQ 中点, 则 $OR < OP$, $OR < OQ$. 故由 P, Q 定义 (易知 Q 为 B 中到 O 距离最近的点) 知 R 不在 A 中, 也不在 B 中. 而由 P, Q 在 S 中, R 在线段 PQ 上及 S 为凸的知 R 在 S 中, 矛盾!

因此, O 在 A 的边界上, 也在 B 的边界上. 故 O 在划分 S 的那条曲线上.

假设 O 为该曲线的某一端. 则可过 O 作 S 的一条支撑线 l. 设 P 为 A 中距离 O 最远的点, 任意连一条从 O 到 P 的除两端外严格位于 A 内部的曲线 (这显

然可行), 记为 e. 考虑由 A 到 B 的旋转, 设 P 变成 Q, e 变成 f. 记 T 为以 OP 为半径, 且与 S 位于 l 同侧的半圆. 则 T 包含 S. 分两种情况考虑:

(1) 若 e, f 交于内部, 则它们的交点既严格位于 A 的内部, 又严格位于 B 内部, 矛盾!

(2) 若 e, f 不交于内部. 于是, T 被 e, f 划分为三部分. 如图 3, 记这三部分为 u, v, w.

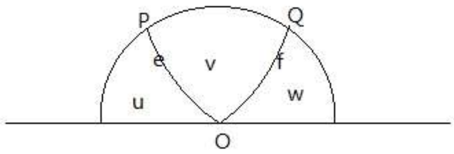

图 3

因为 A 为非凸的, 故存在 A 中两点 X_1, Z_1 及 A 外一点 Y_1, 使 Y_1 在线段 X_1Z_1 上. 结合 S 为凸的及 X_1, Z_1 在 S 中知, Y_1 在 S 中, 故 Y_1 在 B 中.

记 Y_2 为由 A 到 B 的旋转中 Y_1 变成的点, 同理, 有 Y_2 在 A 中.

易知, Y_1 在 u 中与 Y_2 在 w 中至少一者成立, 不防设为前者. 因为 Y_1 不在 A 中, 故 Y_1 不在 e 上. 因为 $Q \neq P, O$ 且不在 A 的内部, 故 Q 不在 e 上. 由于 Y_1, Q 均在 B 中, 故可连一条从 Q 到 Y_1, 除两端外均严格位于 B 内部的曲线, 记为 h. 因为 h 在 T 中, 且两端在 e 两侧 (即 T 被 e 划分的两部分中(不包括 e 上)). 所以 e, h 必有交点且此交点不为 h 的两端. 故此交点严格位于 B 内部, 且在 A 中 (因为可能是 O 或 P), 矛盾!

因此, 旋转中心 O 在划分 S 的那条曲线内部. 则可取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使以 O 以圆心, ε 为半径的圆 ω 在 S 内部. 在原曲线上, 从 O 出发, 沿曲线某一方向移动, 设与 ω 的第一个交点为 J. 同理, 设沿曲线另一方向, 与 ω 的第一个交点为 K. 则在由 A 到 B 的旋转中, J 变为 K, 且 K 变为 J. 由此可知此旋转的旋转角为 $180°$. 于是, 有 S 为中心对称的. $\square$

定理 2 证明 如图 4, 给出了一个反例, 其中 ①, ②, ③, ④为全等的等腰三角形, ⑤ 与 ⑥ 全等, 且不为等腰三角形. $\square$

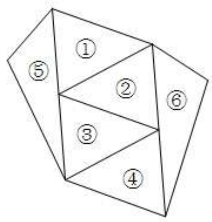

图 4

最后, 我们还想提出下面的猜想 (将 2 改为一般的素数 p):

猜想 设 p 为素数, S 为平面上一个凸形. 若可将 S 分成 p 部分, 且各部分非凸且互相顺向全等. 试问 S 是否一定为旋转角为 $\frac{2\pi}{p}$ 旋转对称图形?