第 60 届国际数学奥林匹克

瞿振华
(华东师范大学数学系, 200241)

英国　巴斯

第一天

7 月 16 日　8:30 – 13:00

1. 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合. 求所有函数 $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, 满足对任意整数 a 和 b, 都有

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)).$$

(南非 供题)

解 将题中等式记为 $P(a,b)$. 由 $P(0,x)$ 得

$$f(0)+2f(x)=f(f(x)). \tag{1}$$

由 $P(x,0)$ 得

$$f(2x)+2f(0)=f(f(x)). \tag{2}$$

比较 (1) 和 (2) 可得

$$f(2x)=2f(x)-f(0). \tag{3}$$

将 (1) 和 (3) 代入原式, 我们有

$$2f(a)-f(0)+2f(b)=f(0)+2f(a+b). \tag{4}$$

令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则 $g(0)=0$, 并且 (4) 可以写为

$$g(a+b)=g(a)+g(b). \tag{5}$$

由柯西方法可知, 对任意整数 n, 都有 $g(n)=g(1)n$. 从而 f 形如 $f(x)=kx+c$,

收稿日期: **2019-07-23.**

其中 $k,c\in\mathbb{Z}$. 代入原式中, 要求对所有整数 a,b 有

$$2k(a+b)+3c=k^2(a+b)+(k+1)c.$$

这当且仅当 $2k=k^2$, 且 $3c=(k+1)c$. 从而 $k=2$ 或 0. 若 $k=2$, 则 c 可为任意整数; 若 $k=0$, 则 $c=0$.

因此满足条件的函数为 $f(x)=0$, 或 $f(x)=2x+c$, c 是任意整数. □

评注 本题在代入简单数值后, 即可将方程转化为柯西方程, 作为第一题是一道非常基础的函数方程问题.

2. 在三角形 ABC 中, 点 A_1 在边 BC 上, 点 B_1 在边 AC 上. 点 P 和 Q 分别在线段 AA_1 和 BB_1 上, 且满足 PQ 平行于 AB. 在直线 PB_1 上取点 P_1, 使得点 B_1 严格位于点 P 与点 P_1 之间, 并且 $\angle PP_1C=\angle BAC$. 类似地, 在直线 QA_1 上取点 Q_1, 使得点 A_1 严格位于点 Q 与点 Q_1 之间, 并且 $\angle CQ_1Q=\angle CBA$. 证明: 点 P,Q,P_1,Q_1 共圆.

(乌克兰 供题)

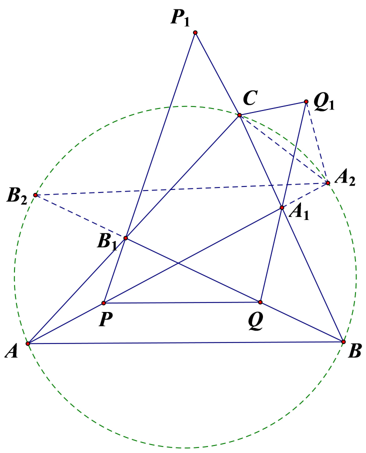
证明 如图所示, 射线 AA_1,BB_1 分别与三角形 ABC 的外接圆相交于点 A_2,B_2. 由于 $PQ\parallel AB$, 故 $\angle A_2B_2B=\angle A_2AB=\angle A_2PQ$, 从而 A_2,B_2,P,Q 共圆. 又

$$\angle CA_2A=\angle CBA=\angle CQ_1Q=\angle CQ_1A_1,$$

故 C,A_1,A_2,Q_1 共圆. 于是

$$\angle A_2Q_1Q=\angle A_2Q_1A_1=\angle A_2CA_1=\angle A_2CB=\angle A_2AB=\angle A_2PQ,$$

故 Q_1,A_2,Q,P 共圆. 类似可证, P_1,B_2,P,Q 共圆, 从而 P_1,Q_1,P,Q,A_2,B_2 六点共圆, 结论获证. □



评注 本题解答看似简单, 实则并不算容易, 点 A_2, B_2 不很明显会去添出, 也有其他方法可做. 考试结果表明这是一道中等难度的平面几何问题, 很多国家做得不好.

3. 一个社交网络上有 2019 个用户, 某些用户之间是朋友关系. 只要用户 A 是用户 B 的朋友, 则用户 B 也是用户 A 的朋友. 如下形式的操作可反复进行, 每一时刻只进行一个操作:

三个用户 A, B 和 C, 满足 A 与 B, C 都是朋友, 但 B 和 C 不是朋友, 则同时改变他们之间的朋友关系, 即 B 和 C 变为朋友, 但 A 与 B 不再是朋友, A 与 C 也不再是朋友. 所有其他的朋友关系不改变.

已知最初时有 1010 个用户每人拥有 1009 个朋友, 有 1009 个用户每人拥有 1010 个朋友. 证明: 存在一个操作序列, 使得操作结束后, 每个用户至多只有一个朋友.

(克罗地亚 供题)

证明 用图论的语言来描述这个问题: 有一个 2019 阶简单图, 其中 1010 个顶点的度为 1009, 1009 个顶点的度为 1010. 允许进行如下操作, 如果有三个顶点 A, B, C 满足 AB, AC 是边, 而 BC 不是边, 则可删去边 AB, AC, 添上边 BC. 要证明, 存在一个操作序列, 使得操作结束后, 这个图变为若干条不相邻的边, 以及一些孤立顶点.

由于 G 中任意两个顶点 u, v 的度之和不小于 2018, 要么 u, v 相邻, 要么 u, v 有公共的邻点, 因此 G 是连通的, 且 G 显然不是完全图, 并且有顶点的度为奇数. 事实上, 结论对一个连通的非完全图, 且有顶点的度为奇数的图都成立. 下面仅假设 G 是这样一个图.

第一步: 若 G 不是树, 则可通过若干次操作, 使得图变为树. 注意到操作不改变一个顶点的度的奇偶性, 因此有度为奇数的顶点这一性质始终保持. 只需说明若不是树, 可通过一次操作使得图仍是连通的, 这样由于每次操作减少一条边, 必定在有限次操作后该图变为树.

取 G 中的最大圈 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_1$. 若这个圈不是 Hamilton 圈, 则存在一个顶点, 不妨设是 x_1, 它与不在该圈上的某个顶点 y 相邻, 于是 y 不与 x_2 相邻, 否则就有更大的圈 $x_1, y, x_2, \cdots, x_k, x_1$. 删去边 x_1y, x_1x_2, 添上边 yx_2 后, 得到的图仍是连通的.

若这个圈是 Hamilton 圈, 由于有奇数度的顶点, 因此整个图不能只是这

个圈, 也不是完全图, 因此存在一条弦, 不妨设 x_1x_i, 满足 x_1, x_{i+1} 不相邻, 或者 x_1, x_{i-1} 不相邻. 不妨设 x_1, x_{i+1} 不相邻, 那么可以删去 x_1x_i, x_ix_{i+1}, 添上边 x_1x_{i+1}, 得到的图仍是连通的.

第二步: 若 G 是树, 则可通过若干次操作, 使得图变为若干条不相邻的边, 以及一些孤立顶点. 如果 G 只有一个或两个顶点, 结论已经成立. 假设 G 至少含有三个顶点, 则存在一个顶点 u, 度至少是 2, 设 uv, uw 是 u 处的两条边, 则 v, w 不相邻, 删去边 uv, uw (此时变为三个连通分支), 再添上边 vw, 此时图有两个连通分支, 并且每个连通分支仍是树. 对至少含有三个顶点的连通分支再作同样的操作, 直至每个连通分支都含有一个或两个顶点, 这便是我们所需的结果. □

评注 本题主要思想是逐步地化简这个图, 以达到最后的目标. 主要的困难之处在于总结出可做如此化简的充分必要条件, 即每个大于 2 阶的连通分支不是完全图, 并且含有奇度顶点. 有了这样的认识之后, 可以想到多种化简手段. 题目的条件隐藏了这个条件, 增加了问题的难度. 本题是一个较难的算法型组合问题.

第二天

7 月 17 日 8:30 – 13:00

4. 求所有正整数对 (k, n), 满足

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

(萨尔瓦多 供题)

解 记等式右边为 R_n, 则

$$v_2(R_n) = \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^n - 2^i) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

而熟知 $v_2(k!) = k - S_2(k)$, 其中 $S_2(k)$ 表示 k 在二进制表示下的数码和, 故

$$k - S_2(k) = \frac{1}{2}(n-1)n,$$

从而 $k = \frac{1}{2}(n-1)n + S_2(k) \geq \frac{1}{2}(n-1)n + 1$.

直接检验 $n = 1, 2, 3, 4$, 可得两组解 $(k, n) = (1, 1), (3, 2)$. 对 $n \geq 5$, 我们证明

$$\left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right)! > 2^{n^2}, \tag{1}$$

而 $R_n \le (2^n)^n = 2^{n^2}$, 从而 $k! > R_n$, $n \ge 5$ 时不存在满足要求的正整数对 (k,n).

$n=5$ 时, 直接验证 (1) 式, $11! = 39,916,800 > 2^{25} = 33,554,432$. 对 $n > 5$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}(n-1)n+1\right)! &= 11! \cdot \prod_{i=12}^{\frac{1}{2}(n-1)n+1} i > 2^{25} \cdot 8^{\frac{1}{2}(n-1)n-10} \\ &= 2^{25+\frac{3}{2}(n-1)n-15} \ge 2^{\frac{3}{2}(n-1)n} \ge 2^{n^2}.\end{aligned}$$

综上, 所有满足条件的正整数对 (k,n) 为 $(1,1)$ 和 $(3,2)$. □

评注 利用 v_2 估计出 k 的下界, 再利用不等式放缩证明 n 较大时均不成立. 本题是很常规的数论问题, 作为第二天的第一题, 也是比较好上手的.

5. 巴斯银行发行的硬币在一面上铸有 H, 在另一面上铸有 T. 哈利有 n 枚这样的硬币并将这些硬币从左至右排成一行. 他反复地进行如下操作: 如果恰有 $k(>0)$枚硬币 H 面朝上, 则他将从左至右的第 k 枚硬币翻转; 如果所有硬币都是 T 面朝上, 则停止操作. 例如: 当 $n=3$, 并且初始状态是 THT, 则操作过程为 $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, 总共进行了三次操作后停止.

(a) 证明: 对每个初始状态, 哈利总在有限次操作后停止.

(b) 对每个初始状态 C, 记 $L(C)$ 为哈利从初始状态 C 开始至停止操作时的操作次数, 例如 $L(THT)=3$, $L(TTT)=0$. 求 C 取遍所有 2^n 个可能的初始状态时得到的 $L(C)$ 的平均值.

(美国 供题)

证明 设 $V_n = \{H,T\}^n$, 是所有长度为 n 的 $H-T$ 序列构成的集合, 即所有 2^n 种硬币序列的状态. 对 n 归纳证明: 对任意 $C \in V_n$, $L(C)$ 有限, 且

$$\sum_{C \in V_n} L(C) = 2^{n-2} n(n+1).$$

$n=1$ 时, $V_1 = \{H,T\}$, $L(H)=1$, $L(T)=0$.

$n=2$ 时, $V_2 = \{HH,HT,TH,TT\}$, $L(HH)=2$, $L(HT)=1$, $L(TH)=3$, $L(TT)=0$, 结论在 $n=1,2$ 时均成立.

假设 $n \ge 3$, 且结论在 n 较小时均成立. 对两个 $H-T$ 序列 A,B, 用 $A \cdot B$ 表示将 A,B 按顺序拼接在一起得到的 $H-T$ 序列. 令

$$X = \{C \cdot T | C \in V_{n-1}\}, \quad Y = \{H \cdot C | C \in V_{n-1}\},$$

$$Z = \{T \cdot C \cdot H | C \in V_{n-2}\}, \quad W = \{H \cdot C \cdot T | C \in V_{n-2}\}.$$

显然 $V_n = X \cup Y \cup Z$, $X \cap Y = W$.

对 $C\cdot T\in X$, 由于最后一位始终是 T, 操作过程就如同只对 C 进行操作, 因此操作 $L(C)$ 次后全变为 T, 故 $L(C\cdot T)=L(C)$.

对 $H\cdot C\in Y$, 设 C 中恰有 k 个 H, 则 $H\cdot C$ 中恰有 $k+1$ 个 H, 而 $H\cdot C$ 的第 $k+1$ 位恰是 C 中的第 k 位, 因此一开始的操作就如同只对 C 进行操作, 操作 $L(C)$ 次后变为 $HTT\cdots T$, 再进行一次操作后全变为 T, 故 $L(H\cdot C)=L(C)+1$.

对 $T\cdot C\cdot H\in Z$, 设 C 中恰有 k 个 H, 则 $T\cdot C\cdot H$ 中恰有 $k+1$ 个 H, 而 $T\cdot C\cdot H$ 的第 $k+1$ 位恰是 C 中的第 k 位, 因此一开始的操作就如同只对 C 进行操作, 在进行了 $L(C)$ 次操作后变为 $TT\cdots TH$, 此后依次将第 $1,2,\cdots,n-1$ 个 T 变为 H, 再依次将第 $n,n-1,\cdots,1$ 个 H 变为 T, 操作停止, 因此 $L(T\cdot C\cdot H)=L(C)+2n-1$.

对 $H\cdot C\cdot T\in W$, 由前两种情形的讨论, 我们有

$$L(H\cdot C\cdot T)=L(H\cdot C)=L(C)+1.$$

至此, 已经证明了对每个 $C\in V_n$, $L(C)$ 是有限的. 最后, 利用归纳假设可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{C\in V_n}L(C)\\
=&\sum_{C\cdot T\in X}L(C\cdot T)+\sum_{H\cdot C\in Y}L(H\cdot C)+\sum_{T\cdot C\cdot H\in Z}L(T\cdot C\cdot H)-\sum_{H\cdot C\cdot T\in W}L(H\cdot C\cdot T)\\
=&\sum_{C\in V_{n-1}}L(C)+\sum_{C\in V_{n-1}}(L(C)+1)+\sum_{C\in V_{n-2}}(L(C)+2n-1)-\sum_{C\in V_{n-2}}(L(C)+1)\\
=&2\sum_{C\in V_{n-1}}L(C)+2^{n-1}+(2n-2)2^{n-2}\\
=&2\cdot 2^{n-3}(n-1)n+2n\cdot 2^{n-2}\\
=&2^{n-2}n(n+1).
\end{aligned}$$

因此, 所有 $L(C)$ 的平均值为 $\frac{1}{4}n(n+1)$. □

评注 本题有多种解法, 这里采用了递推方法, 分几类来递推地给出 $L(C)$ 的值. 还可以对每个 C, 由 H 的位置, 给出 $L(C)$ 的具体表达式, 再进行计算. 本题作为第五题, 是偏容易的组合题, 通过尝试操作过程, 很容易找到规律.

6. 在锐角三角形 ABC 中, I 是内心, $AB\neq AC$. 三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC, CA 和 AB 分别相切于点 D, E 和 F. 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一点交点为 R. 直线 AR 与 ω 的另一交点为 P. 三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q. 证明: 直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂

直于 AI 的直线上.

(印度 供题)

证明 如图 1 所示, 设 DI 与 $\angle BAC$ 的外角平分线交于点 L, 于是 $AL\perp AI$. 只需再证明 L,Q,P 共线. 设 DL 与 ω 的另一个交点为 K, EF 的中点为 N.

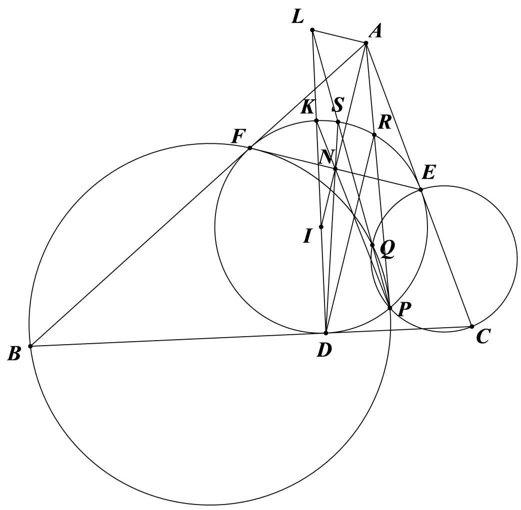


图 1

(i) K,N,P 共线. 由于 $RFPE$ 是调和四边形, 由调和四边形的性质可知 EF 平分 $\angle RNP$. 又

$$\frac{1}{2}\overset{\frown}{KF}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{FD}=90^\circ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{RE}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{FD},$$

故 $\overset{\frown}{KF}=\overset{\frown}{RE}$, 即 K,R 关于 AI 对称, 因此 $\angle KNF=\angle RNE=\angle PNE$, 故 K,N,P 共线.

(ii) L,S,P 共线. 由于 A 是 N 关于 ω 的反演点, $LA\perp AI$, 故直线 AL 是 N 关于 ω 的极线. 设 PS 于 DK 交于点 L', 则 L' 的极线经过 N, N 的极线经过 L', 故 L' 在直线 AL 上, 于是 $L'=L$, 故 L,S,P 共线.

只需证 S,Q,P 共线. 如图 2 所示. 我们采用有向角的记号, 使得角度上的叙述不依赖于特定的图形, 用 $\angle(a,b)$ 表示由直线 a 逆时针旋转至直线 b 的方向时所转过的角度, 在有向角的等式中, 都按模 π 理解. 由于 B,F,Q,P 共圆, C,E,Q,P 共圆, 故

$$\begin{aligned}\angle(BQ,QC)&=\angle(BQ,QP)+\angle(PQ,QC)=\angle(BF,FP)+\angle(PE,EC)\\&=\angle(EF,EP)+\angle(FP,FE)=\angle(FP,EP)=\angle(DF,DE)=\angle(BI,IC),\end{aligned}$$

从而 B,I,Q,C 共圆. 设直线 QP 与 $\odot(BIQC)$ 交于另一点 T, 直线 IT 与 DS 交于点 M.

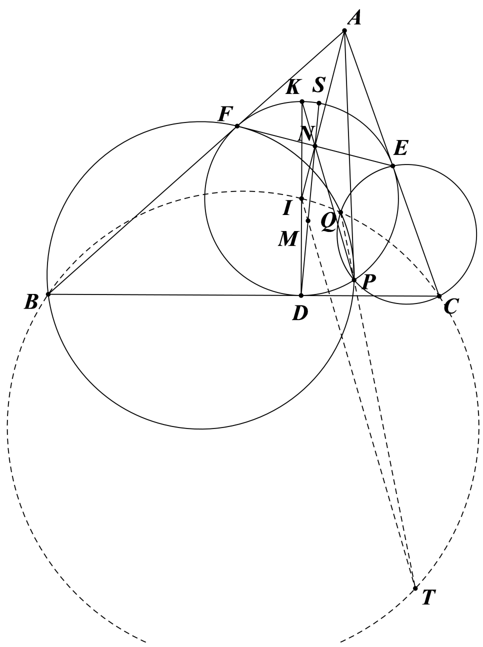


图 2

(iii) M 是 DN 的中点. 注意到

$$\angle(BI, IT) = \angle(BQ, QT) = \angle(BF, FP) = \angle(FK, KP).$$

且由于 $FD \perp FK$, $FD \perp BI$, 故 $FK \parallel BI$, 因此 $IT \parallel KNP$. 又 I 是 DK 的中点, 因此 M 是 DN 的中点.

现在我们来证明 S, P, T 共线, 这将完成整个问题的证明. 如图 3 所示. 设 DF, DE 的中点分别为 F_1, E_1. 由于

$$DF_1 \cdot F_1F = DF_1^2 = BF_1 \cdot F_1I,$$

故 F_1 在 ω 与 $\odot(BIC)$ 的根轴上. 类似地, E_1 也在 ω 与 $\odot(BIC)$ 的根轴上, 因此直线 E_1F_1 就是 ω 与 $\odot(BIC)$ 的根轴, 由于 M 是 DN 的中点, 故 M 在 E_1F_1 上, 从而 M 对 ω 与 $\odot(BIC)$ 等幂. 从而

$$DM \cdot MS = IM \cdot MT,$$

这表明 S, I, D, T 共圆. 于是

$$\angle(DS, ST) = \angle(DI, IT) = \angle(DK, KP) = \angle(DS, SP),$$

故 S, P, T 共线. $\square$

评注 这里给出的是官方证明, 过程曲折, 在一定程度上误导了各国领队对于这个题的难度判断. 原本认为是极难的题, 考试结果却表明是一个正常可做的几何难题. 事实上, 此题解法甚多, 有些想法比较直接, 协调员又给出了 5 种

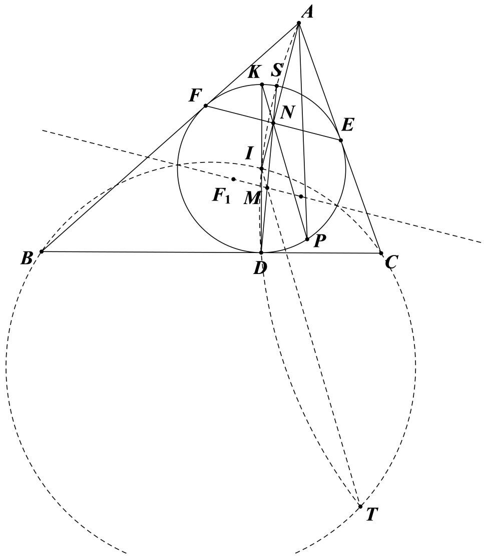


图 3

不同的证明, 中国队员有五人证出, 方法又各不同. 更多解法的总结, 可参见即将出版的《走向 IMO, 2019》.