与 $\{x\}$ 相关的一些数论性质

张晚治

(河北省石家庄第二中学 , 051430)

近年来, 国内外出现一些关于小数部分的不等式. 本文选取了几个有意思的结果, 并归纳总结 供有兴趣的读者参考. 在本文中, $\{x\}$ 均表示 x 的小数部分. 我们先看一道经典试题.

题 1 求最大的正数 λ, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有: $\{\sqrt{2}n\} > \frac{\lambda}{n}$.

解 $\lambda_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

先证 $\left\{\sqrt{2}n\right\} > \frac{1}{2\sqrt{2}n}$. 令 $t = \left[\sqrt{2}n\right]$, 则

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} = \sqrt{2}n - t = \frac{2n^2 - t^2}{\sqrt{2}n + t}. \tag{1}$$

由于 $2n, t$ 均为整数, 故 $2n^2 - t^2 \geq 1$, 结合 $t < \sqrt{2}n$ 知

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} \geq \frac{1}{\sqrt{2}n + t} > \frac{1}{2\sqrt{2}n}.$$

再证 $\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 只需证: 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} < \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{2}n}. \tag{$*$}$$

考虑佩尔方程 $x^2 - 2y^2 = -1$, 由于 $x = y = 1$ 是一组解, 故方程有无穷组解. 取一组解 (m, n), 满足 $n > \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. 变形得

$$\frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{2}n} > \frac{1}{2\sqrt{2}n - 1}. \tag{2}$$

由 $m^2 - 2n^2 = -1$ 知, $m^2 < 2n^2 < (1+m)^2$, 故 $m = \left[\sqrt{2}n\right]$. 从而由 (1) 知,

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} = \frac{2n^2 - m^2}{\sqrt{2}n + m} = \frac{1}{\sqrt{2}n + m}.$$

又 $m > \sqrt{2}n - 1$, 故

$$\left\{\sqrt{2}n\right\} < \frac{1}{2\sqrt{2}n - 1}.$$

修订日期: **2019-07-04.**

结合上式与 (2) 便知 (∗) 成立. □

评注 $\left\{\sqrt{2}n\right\}$ 难以化简, 用定义化为 $\sqrt{2}n-\left[\sqrt{2}n\right]$, 分子有理化后, 利用整数的离散性和 Pell 方程进行离散估计得到结论.

题 2 (1) 设 p 是整数, q 是正整数, 证明: $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}$.

(2) 设正整数 p,q 满足 $\frac{p}{q}<\sqrt{11}$, 证明: $\sqrt{11}-\frac{p}{q}>\frac{1}{2pq}$.

(2018 年波罗的海数学奥林匹克)

证明 (1) 注意到 $\frac{p}{q}$ 为有理数, 由于原结论对某些距离 $\sqrt{2}$ 较远的 $\frac{p}{q}$ 比较显然, 而另一些并不显然. 考虑对 $\frac{p}{q}$ 分三种情况讨论.

当 $\frac{p}{q}<\sqrt{2}$ 时, 即有 $p<\sqrt{2}q$, 故

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\sqrt{2}-\frac{p}{q}=\frac{2q^2-p^2}{q(\sqrt{2}q+p)}\geq\frac{1}{q(\sqrt{2}q+p)}\geq\frac{1}{2\sqrt{2}q^2}>\frac{1}{3q^2}.$$

当 $\sqrt{2}<\frac{p}{q}<3-\sqrt{2}$ 时, 有

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{p}{q}-\sqrt{2}=\frac{p^2-2q^2}{q(p+\sqrt{2}q)}\geq\frac{1}{q(p+\sqrt{2}q)}>\frac{1}{3q^2}.$$

当 $\frac{p}{q}>3-\sqrt{2}$ 时, 若 $q=1$, 则 $p>3-\sqrt{2}$, 从而由 p 是整数知 $p\geq 2$,

$$p-\sqrt{2}\geq 2-\sqrt{2}>\frac{1}{3}=\frac{1}{3q^2},$$

命题成立. 若 $q\geq 2$, 则

$$\frac{p}{q}-\sqrt{2}>3-2\sqrt{2}>\frac{1}{12}\geq\frac{1}{3q^2},$$

命题亦成立.

(2) 当 $\frac{p}{q}\leq 3$ 时, 若 $pq=1$, 则

$$\sqrt{11}-\frac{p}{q}=\sqrt{11}-1>\frac{1}{2}=\frac{1}{2pq}.$$

若 $pq\geq 2$, 则

$$\sqrt{11}-\frac{p}{q}=\sqrt{11}-3>\frac{1}{4}\geq\frac{1}{2pq}.$$

当 $\frac{p}{q}>3$ 时, 即证 $q\sqrt{11}-p>\frac{1}{2p}$, 这等价于

$$\frac{11q^2-p^2}{\sqrt{11}q+p}>\frac{1}{2p}. \tag{$*$}$$

注意到 $p^2\equiv -1 \pmod{11}$ 无解, 故 $11q^2-p^2\geq 2$. 故要证 (∗) 只需证

$$\frac{2}{\sqrt{11}q+p}>\frac{1}{2p},$$

即证 $3p>\sqrt{11}q$, 由 $\frac{p}{q}>3$ 知成立. 故 $(*)$ 成立, 从而命题成立. $\square$

评注 (i). 题 1 中, 不等式右边是关于 n 的式子, 因此只需对分子有理化后的分子应用 Pell 方程的结论. 在分母放缩时, 由于 $\{x\}$ 可趋于 0, 放缩几乎是"无损的". 由于题 2 右边涉及有理数的分子与分母, 因此需对有理数大小进行估计, 再用 Pell 方程的结论.

(ii). 上面两道题无一例外是对二次代数数进行逼近, 所以绕不开对 Pell 方程是否有解的试探. 更一般地, 下面的 Hwrwitz 不等式是对无理数更精确的逼近: 设 $a\in\mathbb{R}$, 则存在整数 p,q, 使得 $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$.

值得指出的是, $\sqrt{5}$ 是最佳常数, 证明见文献 [1].

对 n 次代数数而言, 有如下的结果:

刘维尔定理 设 θ 为 n 次代数数, 存在 $c>0$, 使得对任意 $a,b\in\mathbb{Z},b>0$, 均有 $\left|\theta-\frac{a}{b}\right|>\frac{c}{b^n}$.

证明见文献 [1]. 由刘维尔定理知, 对于一个 n 次代数数, 不可能存在一个高于 n 阶的逼近(在题 2 中体现为 pq,q^2), 该定理也从侧面给出了一个判定超越数的条件.

题 3 给定正奇数 a 和有理数 b, 其既约分数表示形式的分母为奇数. 对任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 定义 $M(n,m)=\left|n\sqrt{n^2+a}-bm\right|$. 证明:

(1) 至多只有有限对正整数 (n,m), 使得 $M(n,m)=0$;

(2) 存在正常数 c, 使得对任意 $n,m\in\mathbb{N}^*$, 若 $M(n,m)\neq 0$, 则 $M(n,m)\geq c$.

(2018 年白俄罗斯数学奥林匹克 11 年级第 7 题)

证明 (1) 若 $M(n,m)=0$, 则有 $n\sqrt{n^2+a}=bm$, 即有

$$n^2+a=\left(\frac{bm}{n}\right)^2.$$

于是 $\frac{bm}{n}$ 为整数. 从而 a 可以表示成两个整数的平方差, 又 a 表示成两个整数的平方差只有有限种方法, 故满足 $M(n,m)=0$ 的 (n,m) 只有有限多对.

(2) 先证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\sqrt{n^2+a}\right\}=\frac{1}{2}$. $(*)$

事实上,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(n^2+\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(n^2+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^2}{4}}{\sqrt{\left(n^2+\frac{a}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(n^2+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}}=0,\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{(n^2+\frac{a}{2})^2}\right\}=\frac{1}{2}$ (因 a 是奇数), 故

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\sqrt{n^2+a}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(n^2+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}.$$

设 b 表示成既约分数时的分母为奇素数 p. 则由 $(*)$ 知, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4p}\leq\left\{n\sqrt{n^2+a}\right\}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4p}.$$

分母为 p 且与 $\frac{1}{2}$ 最接近的两个分数为 $\frac{\frac{p+1}{2}}{p}$、 $\frac{\frac{p-1}{2}}{p}$, 这两个数与 $\frac{1}{2}$ 的差的绝对值均为 $\frac{1}{4p}$, 故

$$\left|\{bm\}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{4p},$$

于是, 当 $n>N$ 时,

$$M(n,m)=\left|n\sqrt{n^2+a}-bm\right|\geq\left|\left\{n\sqrt{n^2+a}\right\}-\{bm\}\right|\geq\frac{1}{4p}.\qquad(**)$$

对于每个 $1\leq n\leq N$, $\left|n\sqrt{n^2+a}-bm\right|$ 为关于 m 的函数, 设其非零最小值为 $f(n)$. 取

$$c=\min\{f(1),f(2),\cdots,f(N),\frac{1}{4p}\},$$

结合 $(**)$ 便知 c 满足要求. □

评注 此题对 n 较大时, 进行间距估计, 得到一个下界估计. 在 n 较小时, 只有有限种情况, 必存在非零最小值.

题 4 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\left|\left\{\sqrt{2}n\right\}-\left\{\sqrt{3}n\right\}\right|>\frac{1}{20n^3}.$$

证明 要证原命题只需证(将两个小数部分合并)

$$1-\frac{1}{20n^3}>\left\{(\sqrt{3}-\sqrt{2})n\right\}>\frac{1}{20n^3}.\qquad(*)$$

令 $x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})n$, 则 $x<n, x^2=(5-2\sqrt{6})n^2$, 进一步,

$$x^4-10n^2x^2=-n^4.\qquad(1)$$

于是, 由二次函数的单调性知,

$$[x^2]^2-10n^2[x^2]+n^4>0,\ \ \lceil x^2\rceil^2-10n^2\lceil x^2\rceil+n^4<0,\qquad(2)$$

其中 $\lceil y\rceil$ 表示大于 y 的最小整数.

a) 证明: $\{x^2\} \geq \frac{1}{10n^2}$, $\{-x^2\} = \lceil x^2 \rceil - x^2 > \frac{1}{10n^2}$.

由 (1) 知,

$$\left([x^2] + \{x^2\}\right)^2 - 10n^2\left([x^2] + \{x^2\}\right) + n^4 = 0.$$

结合 (2) 知,

$$\left(10n^2 - 2[x^2]\right)\{x^2\} - \left(x^2\right)^2 = [x^2]^2 - 10n^2[x^2] + n^4 > 0,$$

于是, $10n^2\{x^2\} \geq 1$, 即 $\{x^2\} \geq \frac{1}{10n^2}$.

令 $a = \lceil x^2 \rceil$, $b = \lceil x^2 \rceil - x^2$. 则由 (1), (2) 知,

$$b(10n^2 - 2a + b) = 10n^2 a - a^2 - n^4 > 0,$$

故

$$b \geq \frac{1}{10n^2 - 2a + b} > \frac{1}{10n^2}.$$

b) 再证: $1 - \frac{1}{20n^3} > \{x\} > \frac{1}{20n^3}$.

一方面, 由 $x = [x] + \{x\}$ 知,

$$\{x^2\} = \left\{(\{x\} + [x])^2\right\} = \left\{\{x\}^2 + 2[x]\{x\}\right\} = \{2x\{x\} - \{x\}^2\},$$

又 $\{x^2\} \geq \frac{1}{10n^2}$, 故 $\{2x\{x\} - \{x\}^2\} > \frac{1}{10n^2}$. 于是

$$2x\{x\} - \{x\}^2 \geq \frac{1}{10n^2},$$

从而 $2x\{x\} \geq \frac{1}{10n^2}$, 故

$$\{x\} > \frac{1}{20n^2 x} > \frac{1}{20n^3}.$$

$(*)$ 右式得证.

另一方面, 由 $x = \lceil x \rceil - \{-x\}$ 知,

$$\{-x^2\} = \left\{-\left(\lceil x \rceil - \{-x\}\right)^2\right\} = \left\{-\{-x\}^2 + 2\lceil x \rceil\{-x\}\right\} = \{2x\{-x\} + \{-x\}^2\},$$

又 $\{-x^2\} \geq \frac{1}{10n^2}$, 故 $\{2x\{-x\} + \{-x\}^2\} > \frac{1}{10n^2}$. 于是

$$\{-x\} > \frac{1}{20n^2 x} > \frac{1}{20n^3},$$

这等价于 $\{x\} < 1 - \frac{1}{20n^3}$, $(*)$ 左式得证. □

评注 (i). 注意到 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 是方程 $x^4 - 10x^2 + 1$ 的根, 但 $\frac{1}{20n^3}$ 的阶为 -3, 故考虑先对 $\{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 n^2\}$ 放缩, 再放缩 $\{(\sqrt{3} - \sqrt{2})n\}$.

(ii). 一般地, 该命题有如下推广版本: 若 $a, b \in \mathbb{N}^*$ 为非完全平方数, 则

$$\left|\{\sqrt{a}n\} - \{\sqrt{b}n\}\right| > \frac{1}{4(a+b)n^3}.$$

(iii). 更一般地, 若 k 个整数 $a_1,\cdots,a_k$ 均为非完全平方数, 则

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\{n\sqrt{a_i}\}\right| > \frac{c}{n^{2^k-1}},$$

其中 $c=\left(2\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}\right)^{1-2^k}$.

下面的题目难度较大, 需要较强的代数变形能力, 对恒等式的离散估计, 以及对小数部分的精确放缩.

题 5 求最大的正实数 c, 使得对于任意满足 $a+b\in\mathbb{N}^*$ 的正实数 a,b, 均有

$$\{a^2\}+\{b^2\}\le 2-\frac{c}{(a+b)^2}.$$

(2018 年北京大学数学营试题)

解 所求最大的正实数 $c=\frac{3}{4}$.

引理 1 不存在整数 x,y,z 使得

$$2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2=1 \text{ 或 } 2.$$

事实上, 假设存在, 则有

$$(2-x-y)^2=4xy-1 \text{ 或 } 4xy-2.$$

左边模 4 余 $0,1$ 右边模 4 余 $2,3$, 矛盾! 引理成立.

引理 2 存在无穷个正整数 d, 使得方程 $x^2-4dy^2=-3$ 有无穷多对正整数解.

事实上, 取 $4d=k^2+3$, 其中 k 为奇数, 易知 $4d$ 不为完全平方数. 注意到 Pell 方程 $x^2-4dy^2=-3$ 有解 $(k,1)$, 故有无穷多组解. 引理得证.

(i) 先证 $c=\frac{3}{4}$ 时, 原命题成立.

设 $a+b=k, a^2=m-\frac{x}{k^2}, b^2=n-\frac{y}{k^2}$, 其中 $k,m,n\in\mathbb{N}^*, 0<x,y<k^2$. 于是, $\{a^2\}=1-\frac{x}{k^2}, \{b^2\}=1-\frac{y}{k^2}$, 且

$$\sqrt{m-\frac{x}{k^2}}+\sqrt{n-\frac{y}{k^2}}=k=a+b<\sqrt{m}+\sqrt{n}. \qquad (*)$$

下证 $\{a^2\}+\{b^2\}\le 2-\frac{\frac{3}{4}}{(a+b)^2}$. 即证 $x+y\ge\frac{3}{4}$.

反证法. 假设 $x+y<\frac{3}{4}$, 则

$$k\ge\sqrt{m-\frac{x}{k^2}}+\sqrt{1-\frac{y}{k^2}}\ge\sqrt{m-x}+\sqrt{1-y}>\sqrt{m},$$

同理 $k>\sqrt{n}$. 故

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}-k\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+k\right)\left(k-\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(k+\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)>0,$$

即

$$2mn+2mk^2+2nk^2-m^2-n^2-k^4\geq 0.$$

结合引理 1 知,

$$2mn+2mk^2+2nk^2-m^2-n^2-k^4\geq 3.$$

由 $(*)$ 和 $k^2>\max\{m,n\}>|m-n|$ 知,

$$\begin{aligned}2mn+2mk^2+2nk^2-\left(m^2+n^2+k^4\right)&=2(x+y)+\frac{2}{k^2}(x-y)(n-m)+\frac{(x-y)^4}{k^4}\\&<\frac{3}{2}+\frac{\{n-m\}+1}{k^2}<3,\end{aligned}$$

矛盾.

(ii) 证明 $c\leq\frac{3}{4}$.

取正整数 d 使得引理 2 的方程有无穷多组整数解. 取 (x,y) 为满足引理 2 的正整数解, 且 $x>2d$. 取

$$a=\sqrt{d-\frac{u}{y^2}},b=\sqrt{y^2+d-x-\frac{v}{y^2}},$$

且满足 $a+b=y\in\mathbb{N}^*$.

我们首先来看当 $v\to 0^+$时, u 会接近于什么值, 即解 u 的方程,

$$\begin{aligned}&\sqrt{d-\frac{u}{y^2}}+\sqrt{y^2+d-x}=y\\&\Leftrightarrow 2\sqrt{d-\frac{u}{y^2}}\sqrt{y^2+d-x}=x+\frac{u}{y^2}-2d\\&\Leftrightarrow 4\left(d-\frac{u}{y^2}\right)\left(y^2+d-x\right)=\left(x+\frac{u}{y^2}-2d\right)^2\\&\Leftrightarrow 4y^2d-4u+\frac{2xu}{y^2}=x^2+\frac{u^2}{y^4}\\&\Leftrightarrow 4u=3+\frac{2xu}{y^2}-\frac{u^2}{y^4},\end{aligned}$$

再令 $y\to+\infty$，我们得到 $u\to\frac{3}{4}$, 即我们在

$$1-\frac{u}{y^2}+1-\frac{v}{y^2}\leq 2-\frac{c}{y^2}$$

中令 $v\to 0+y\to\infty$ 且满足引理 2 中的解, 可得 $u\to\frac{3}{4}$, 从而我们有 $c\leq\frac{3}{4}$. □

评注 此题我先发现本质是数论题, 就去想用有理逼近来做, 但未做出. 后来换了一种代数化的思路, 将小数部分设出, 并用利用海伦公式中的恒等式与引理

得到结论. 最后可利用 Pell 方程给出构造.

致谢 作者感谢吴尉迟老师审阅了本文, 并给出了宝贵的意见!

参考文献

[1] 冯贝叶. 多项式与无理数 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2018 年 1 月.

[2] 2018 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦 (2018) [M]. 上海华东师范大学出版社, 2018.9.