

# 数学新星问题征解

第三十四期 (2019.09)

主持: 牟晓生

**第一题.** 已知  $PA, PB$  分别切圆  $\Gamma$  于点  $A, B$ .  $C$  是圆  $\Gamma$  上一点, 且与  $P$  在直线  $AB$  异侧,  $PC$  交圆  $\Gamma$  于另一点  $D$ . 令  $S$  是  $\triangle PAB$  外心, 直线  $DS$  交圆于另一点  $E$ ,  $PC$  的中垂线分别交  $AE, BE$  于  $X, Y$ . 求证:  $C, X, Y, E$  四点共圆.

(湖南师大附中 苏林 供题)

---

**第二题.** 给定不小于 4 的偶数  $n$ , 将  $n \times n$  方格表中的方格黑白相间染色. 每次可任意选择一个  $2 \times 3$  或  $3 \times 2$  子方格表, 并将每格的颜色染为相反的颜色. 问: 是否可以经过有限次操作将所有方格染为一种颜色?

(北京大学学生 池卓倪 重庆一中学生 赵维捷 供题)

---

**第三题.** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为满足  $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$  的正实数. 证明:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k} - 1)^n} \geq \frac{a_1 \cdots a_n}{(a_1 \cdots a_n - 1)^n}.$$

(杭州二中学生 刘浩宇 供题)

---

**第四题.** 是否存在非零整数  $a, b, c$ , 使得  $3a^4 + 4b^4 = 19c^4$ ?

(哥伦比亚大学 牟晓生 供题)