2019 年北大“飞测”数学试题解析

石泽晖 [1] 王广廷 [2] 羊明亮 [3]

(1. 长春吉大附中实验学校, 130021;

2. 上海市上海中学, 200231; 3. 浙江省乐清知临中学, 325600)

2019 年 6 月 21 日, 北京大学在浙江, 上海, 湖南, 湖北等地举行了数学“飞测”, 其题目区分度极好, 不乏难题, 也不乏高等背景. 下面我们给出这次飞测试题、解答及短评, 供大家参考.

I. 试 题

1. 用 $S(n)$ 表示 n 的各位数码和.

(1) 证明或否定: 对任意各项系数均为正整数的首一多项式 $f(x)$, 存在正整数 n, 使 $S(f(n)) \le 2019$;

(2) 证明或否定: 对任意各项系数均为正整数的首一非常数多项式 $f(x)$, 存在正整数 n, 使 $S(f(n)) \ge 2019$.

2. 称两个凸多边形位似, 如果两个凸多边形相似且对应各边平行, 求所有的凸多边形使得不能用三个与之位似且比它小的凸多边形覆盖它.

3. 求最小的正实数 k, 使得对任意正整数 n, 存在非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n} a_j} \le k.$$

4. 称至多含有一个度为 2 的顶点的树为 2-树, 将 n 阶树的各条边标上 $1, 2, \cdots, n-1$ 称为一个标记. 称一个顶点的权为这个顶点引出的所有边上所标的数字之和. 求所有正整数, 满足:

修订日期: **2019-07-28.**

(1) 对任意 n 阶 2−树, 存在一个标记使各个顶点的权模 n 互不同余;

(2) 对任意 n 阶 2−树, 存在一个标记使各个顶点的权模 n 至少有 $n-1$ 个不同余数, 但不存在一个标记使各个顶点的权有 n 个不同的余数.

II. 解答与评注

题 1 用 $S(n)$ 表示 n 的各位数码和.

(1) 证明或否定: 对任意各项系数均为正整数的首一多项式 $f(x)$, 存在正整数 n, 使 $S(f(n)) \leq 2019$;

(2) 证明或否定: 对任意各项系数均为正整数的首一非常数多项式 $f(x)$, 存在正整数 n, 使 $S(f(n)) \geq 2019$.

解 (1) 命题是错误的, 理由如下:

取 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+10^{2019})+\underbrace{11\cdots1}_{2020\text{个}1}$. 容易知道, 对任意的正整数 n, 有

$$(10^{2019}!) \mid (n+1)(n+2)\cdots(n+10^{2019}),$$

故

$$10^{2020} \mid (n+1)(n+2)\cdots(n+10^{2019}).$$

从而

$$\begin{aligned}S(f(n)) &= S\left((n+1)(n+2)\cdots(n+10^{2019})+\underbrace{11\cdots1}_{2020\text{个}1}\right)\\&= S\left((n+1)(n+2)\cdots(n+10^{2019})\right)+S(\underbrace{11\cdots1}_{2020\text{个}1})\\&\geq 2020>2019.\end{aligned}$$

(2) 命题是正确的, 理由如下:

设 $f(x)=x^t+a_{t-1}x^{t-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(t\in\mathbb{N}^*)$. 考虑 $f(10^\beta\cdot(10^\alpha+1)^{2019})$, 其中正整数 α,β 待定.

取 $\alpha>\mathrm{C}_{2019t}^0+\mathrm{C}_{2019t}^1+\cdots+\mathrm{C}_{2019t}^{2019t}=2^{2019t}$, 则

$$10^\alpha>\mathrm{C}_{2019t}^i\ (0\leq i\leq 2019t),$$

从而

$$S\left((10^\alpha+1)^{2019t}\right)=S\left(\sum_{i=0}^{2019t}\cdot\mathrm{C}_{2019t}^i\right)\geq 2019t+1>2019.$$

在 α 取定后, 再取 β 充分大, 使得

$$10^{\beta t} > a_{t-1} \cdot 10^{\beta(t-1)}(10^{\alpha}+1)^{2019(t-1)} + \cdots + a_0,$$

则

$$\begin{aligned} S\left(f(10^{\beta}\cdot(10^{\alpha}+1)^{2019})\right) &\geq S\left(10^{\beta t}\cdot(10^{\alpha}+1)^{2019t}\right) \\ &= S\left((10^{\alpha}+1)^{2019t}\right) > 2019. \end{aligned}$$

□

评注 此题的第一问是容易的, 第二问的处理方法与 2015 年全国高中联赛二试压轴题是类似的, 与另一道难度更大一些的问题也是类似的: 求所有的多项式 $f(x)$, 其各项系数为非负整数, 使得对任意 $n \in K$, 均有 $f(n) \in K$, 其中 K 是由所有不含数码 7 的非负整数构成的集合. 有兴趣的读者可以一试.

题 2 称两个凸多边形位似, 如果两个凸多边形相似且对应各边平行, 求所有的凸多边形使得不能用三个与之位似且比它小的凸多边形覆盖它.

解 满足题意的凸多边形, 只有平行四边形.

一方面, 若凸多边形 F 不是平行四边形, 则一定可以用三个与之位似且比它小的凸多边形覆盖它. 为此, 先证明一个引理.

引理 存在一个三角形 T 包含凸多边形 F, 且 T 的每一条边均包含凸多边形 F 的某条边.

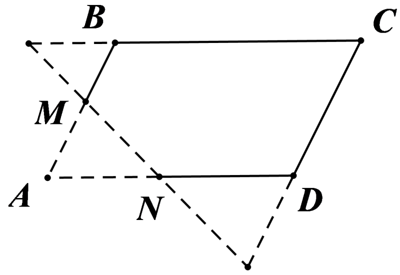
引理证明 若凸多边形 F 为三角形, 则令 $T = F$ 即可.

若凸多边形 F 不为三角形, 则存在凸多边形 F 的两条边, 它们不平行, 也没有交点. 将这两条边延长, 使得其相交, 就得到一个包含凸多边形 F 的多边形 F_1, 且 F_1 的边数少于凸多边形 F 的边数, F_1 的每条边均包含凸多边形 F 的某条边.

反复进行这过程, 最终得到的图形 F', 必然不存在既不平行又不相交的边, 从而只能是三角形或者平行四边形. 且 F' 包含凸多边形 F, F' 的每条边均包含凸多边形 F 的某条边.

若 F' 为三角形, 则只需取 $T = F'$ 即可.

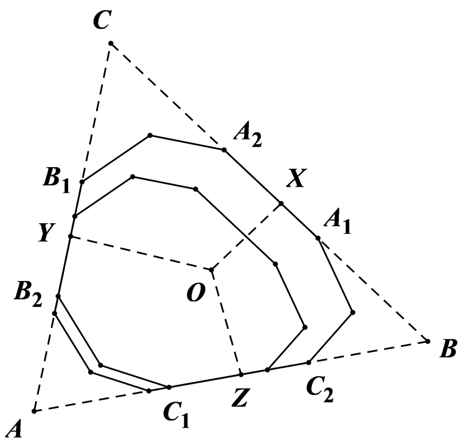
若 F' 为平行四边形 $ABCD$, 由于凸多边形 F 并不为平行四边形, 故 F' 至少有一个顶点不是凸多边形 F 的顶点, 不妨设为点 A (如图). 设点 M 为凸多边形 F 的所有落在线段 AB 上的顶点中最靠近点 A 的一个, 则在凸多边形 F 中由 M 点引出的一条边落在线段 AB 上, 而另一条边所在直线与线段 AD 相交, 设



交点为 N, 则直线 MN, BC, CD 围成的三角形 T 即包含凸多边形 F, 且 T 的每条边均包含凸多边形 F 的某条边.

至此, 引理证毕.

回到原题. 利用上述引理, 不妨设凸多边形 F 被包含在 $\triangle ABC$ 中, 且凸多边形 F 的边 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 分别落在线段 BC, CA, AB 上 (如图).



任取 F 内部一点 O 及边 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 上的内点 X, Y, Z. 则线段 OX, OY, OZ 将 F 划分为三个多边形 F_1, F_2, F_3.

不妨设多边形 F_1 在四边形 $AZOY$ 内部. 由点 O, Y, Z 的选取知, 若 $0 < k < 1$ 且无限接近于 1, 则以 A 为位似中心, k 为位似比的位似变换 φ_1 满足 φ_1 (凸多边形 $F \cup$ 四边形 $AZOY$) 包含四边形 $AZOY$. 从而 $\varphi_1(F)$ 覆盖住了 F_1.

类似地, 存在两个位似比小于 1 的位似变换 φ_2, φ_3, 使得 $\varphi_2(F)$ 覆盖住了 F_2, $\varphi_3(F)$覆盖住了 F_3. 于是凸四边形 F 被 $\varphi_1(F), \varphi_2(F), \varphi_3(F)$ 的并集所覆盖.

另一方面, 若凸多边形 F 为平行四边形 $ABCD$, 对于任意一个与其位似且比其小的平行四边形 F_1, 若 F_1 包含点 A, 则 F_1 不可能再包含凸多边形 F 的其它顶点, 这表明凸多边形 F 不可能被少于四个与其位似且比其小的图形覆盖. □

评注 本题同 2015 年第 7 期的《中等数学》的数学奥林匹克问题高 435

题， 仅是换了一种问法. 本题解法中需要的引理是凸包理论中的重要结论, 之后容易想到借助位似来完成证明.

题 3 求最小的正实数 k, 使得对任意正整数 n, 存在非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n} a_j} \le k.$$

解 设 S_n 是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n} a_j}$ 在非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n$ 时取到的最小值, 则 $S_1 = 1$. 从而在 $\sum\limits_{i=2}^{n+1} a_i = n+1-a_1$ 时,

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{n}{n+1-a_1} a_i = n,$$

从而可知

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\frac{n^2}{(n+1-a_1)^2} a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n+1} \frac{n}{n+1-a_1} a_j}$$

的最小值为 S_n, 即 $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n+1} a_j}$ 的最小值为 $\frac{n+1-a_1}{n} S_n$. 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n+1} a_j} =& \frac{a_1^2}{n+1} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i^2}{\sum\limits_{j=i}^{n+1} a_j} \\
\ge& \frac{a_1^2}{n+1} + \frac{n+1-a_1}{n} S_n \\
=& \frac{a_1^2}{n+1} - \frac{S_n}{n} a_1 + \frac{(n+1)S_n}{n} \\
\ge& -\frac{(n+1)S_n^2}{4n^2} + \frac{(n+1)S_n}{n}.
\end{aligned}$$

由 S_{n+1} 的定义可得如下递推式

$$S_{n+1} = -\frac{n+1}{4n^2} S_n^2 + \frac{n+1}{n} S_n,$$

变形可得

$$\frac{S_{n+1}}{4(n+1)} = \frac{S_n}{4n}\left(1 - \frac{S_n}{4n}\right).$$

设 $T_n = \frac{S_n}{4n}$, 则 $T_1 = \frac{1}{4}$, 上述递推式可化为

$$T_{n+1} = T_n(1 - T_n).$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{T_n(1-T_n)} = \frac{1}{T_n} + \frac{1}{1-T_n} \\
&\Rightarrow \frac{1}{T_{n+1}} - \frac{1}{T_n} = \frac{1}{1-T_n} \\
&\Rightarrow \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{1-T_n} + \frac{1}{1-T_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{1-T_1} + \frac{1}{T_1} \\
&\qquad\qquad = 4 + \frac{1}{1-T_1} + \cdots + \frac{1}{1-T_n},
\end{aligned}
$$

注意到 $T_n > 0$, 从而可知 $\frac{1}{1-T_i} > 1\ (1 \le i \le n)$.

一方面, 易知

$$\frac{1}{T_{n+1}} > 4 + 1 + \cdots + 1 = n + 4,$$

从而

$$T_n < \frac{1}{n+3}\ (n \ge 2).$$

另一方面, 由 $T_1 = \frac{1}{4}$, $T_n < \frac{1}{n+3}\ (n \ge 2)$, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T_{n+1}} &= 4 + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \cdots + \frac{1}{1-\frac{1}{n+3}} \\
&= 4 + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{n+3}{n+2} \\
&= 4 + n + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

结合以上两方面可知

$$\frac{4n}{n + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}} < S_n = 4nT_n < \frac{4n}{n+3}\ (n \ge 2).$$

由夹挤定理可知

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 4.$$

结合 $S_n < \frac{4n}{n+3} < 4$ 可知, k 的最小值为 4. □

评注 此题是一道中档难度的问题, 难点有两个: 一是如何得到解答中 S_n 的递推公式, 本文采取的是归纳法; 二是求 S_n 的极限, 本文中采用的是夹挤定理来处理, 略显复杂. 也可根据 Stolz 定理来处理, 更显直白.

$\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理: 设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量, 又存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

易知 T_n 单调递减, 而且有下界, 故必存在极限, 对 $T_{n+1}=T_n(1-T_n)$ 两边取极限, 可知

$$\lim_{n\to\infty} T_n = 0.$$

从而数列 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 是严格递增的无穷大量, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)-4n}{\frac{1}{T_{n+1}}-\frac{1}{T_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\frac{1}{1-T_n}}=4,$$

故由 $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}(S_n)=\lim_{n\to\infty}(4nT_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\frac{1}{T_n}}=4.$$

题 4 称至多含有一个度为 2 的顶点的树为 2-树, 将 n 阶树的各条边标上 $1,2,\cdots,n-1$ 称为一个标记. 称一个顶点的权为这个顶点引出的所有边上所标的数字之和. 求所有正整数, 满足:

(1) 对任意 n 阶 2-树, 存在一个标记使各个顶点的权模 n 互不同余;

(2) 对任意 n 阶 2-树, 存在一个标记使各个顶点的权模 n 至少有 $n-1$ 个不同余数, 但不存在一个标记使各个顶点的权有 n 个不同的余数.

解 (1) 所求为全体正奇数.

一方面, 对于满足条件的 n, 由于对任意 n 阶 2−树, 存在一个标记使各个顶点的权模 n 互不同余. 故有该标记下各顶点的权之和模 n 同余

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

又各顶点的权之和等于所有边上所标数之和的两倍 (因每条边恰被计算两遍). 即为

$$2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1).$$

故有

$$n(n-1)\equiv\frac{1}{2}n(n+1)\pmod{n},$$

有

$$n\mid\frac{1}{2}n(n-1),$$

从而 $2\mid n-1$, 即 $2\nmid n$.

另一方面, 我们证明: 全体正奇数均满足要求. 为此, 我们先证明一个引理.

引理 对任意正整数 k, 可在 $\{1,2,\cdots,3k+1\}$ 中取出 k 个两两不交的 3 元子集 $\{a_i,b_i,c_i\}$ $(1\le i\le k)$, 满足 $c_i=a_i+b_i$ $(1\le i\le k)$, 且 $3k$ 与 $3k+1$ 中恰有

一个出现在这些 3 元子集中.

引理证明　我们对 k 模 4 分类讨论.

(i) $k=4l+1, l\in\mathbb{N}$. 取这些子集为:

$\{6l+1-j, 6l+2+j, 2j+1\}$, $j=0,1,\cdots,l-1$.

$\{5l+1-m, 7l+3+m, 2l+2+2m\}$, $m=0,1,\cdots,l-1$.

$\{7l+2, 4l+1, 11l+3\}$, $\{12l+3, 2l+1, 10l+2\}$, $\{10l+2-r, 10l+2+r, 2r\}$, $r=1,2,\cdots,l$. 其中 $l=0$ 时无上述这些集合. 及

$\{9l+1-s, 11l+4+s, 2l+3+2s\}$, $s=0,1,\cdots,l-1$. 其中 $l=1$ 时无这些集合. 也即为:

$\{1, 6l+1, 6l+2\}$, $\{3, 6l, 6l+3\}, \cdots$, $\{2l-1, 5l+2, 7l+1\}$,

$\{2l+2, 5l+1, 7l+3\}$, $\{2l+4, 5l, 7l+4\}, \cdots$, $\{4l, 4l+2, 8l+2\}$,

$\{4l-1, 8l+3, 12l+2\}$, $\{4l-3, 8l+4, 12l+1\}, \cdots$, $\{2l+3, 9l+1, 11l+4\}$,

$\{2l, 9l+2, 11l+2\}$, $\{2l-1, 9l+3, 11l+1\}, \cdots$, $\{2, 10l+1, 10l+3\}$,

$\{4l+1, 7l+2, 11l+3\}$, $\{2l+1, 10l+2, 12l+3\}$.

容易验证上述集合满足要求.

(ii) $k=4l+2, l\in\mathbb{N}$. 取这些子集为:

$\{1, 6l+4, 6l+5\}$, $\{3, 6l+3, 6l+6\}, \cdots, \{2l-1, 5l+5, 7l+4\}$,

$\{2l+2, 5l+3, 7l+5\}$, $\{2l+4, 5l+2, 7l+6\}, \cdots, \{4l+2, 4l+3, 8l+5\}$,

$\{4l-1, 8l+6, 12l+5\}$, $\{4l-3, 8l+7, 12l+4\}, \cdots, \{2l+3, 9l+4, 11l+7\}$,

$\{2l, 9l+6, 11l+6\}$, $\{2l-2, 9l+7, 11l+5\}, \cdots, \{2, 10l+5, 10l+7\}$,

$\{2l+1, 10l+6, 12l+7\}, \{4l+1, 5l+4, 9l+5\}$.

容易验证上述集合满足要求.

(iii) $k=4l+3, l\in\mathbb{N}$. 取这些子集为:

$\{1, 6l+4, 6l+5\}$, $\{3, 6l+3, 6l+6\}, \cdots, \{2l+1, 5l+4, 7l+5\}$,

$\{2l+4, 5l+3, 7l+7\}$, $\{2l+6, 5l+2, 7l+8\}, \cdots$, $\{4l+2, 4l+4, 8l+6\}$,

$\{4l+1, 8l+7, 12l+8\}$, $\{4l-1, 8l+8, 12l+7\}, \cdots, \{2l+5, 9l+5, 11l+10\}$,

$\{2l+2, 9l+6, 11l+8\}$, $\{2l, 9l+7, 11l+7\}, \cdots$, $\{2, 10l+6, 10l+8\}$,

$\{4l+3, 7l+6, 11l+9\}$, $\{2l+3, 10l+7, 12l+10\}$.

容易验证上述集合满足要求.

(iv) $k=4l+4, l\in\mathbb{N}$. 取这些子集为:

$\{1, 6l+7, 6l+8\}$, $\{3, 6l+6, 6l+9\}, \cdots$, $\{2l-1, 5l+8, 7l+7\}$,

$\{2l+2, 5l+6, 7l+8\}$, $\{2l+4, 5l+5, 7l+9\}, \cdots$, $\{4l+4, 4l+5, 8l+9\}$,

$\{4l+1, 8l+10, 12l+11\}$, $\{4l-1, 8l+11, 12l+10\}, \cdots$, $\{2l+3, 9l+9, 11l+12\}$, $\{2l, 9l+11, 11l+11\}$, $\{2l-2, 9l+12, 11l+10\}, \cdots$, $\{2, 10l+10, 10l+12\}$, $\{2l+1, 10l+11, 12l+12\}$, $\{4l+3, 5l+7, 9l+10\}$.

容易验证上述集合满足要求.

综合 (i),(ii),(iii),(iv) 知引理获证!

回到原题. $n=1,3$ 时结论显然成立. $n=5$ 时, 我们先证明:

对任一 n 阶 2-树 (n 不必为奇数) 的 n 个顶点, 可以选择其中 $n-1$ 个度不为 2 的顶点 $V_1, V_2, \cdots, V_{n-1}$, 并选择 $n-1$ 条边 $f(V_1), f(V_2), \cdots, f(V_{n-1})$, 它们互不相同且 $f(V_i)$ 以 V_i 作为一个顶点, $1 \leq i \leq n-1$. (*)

我们只需选取原图中的一片"叶子", 将叶子中的点对应到其中的边, 并将该叶子去掉, 在新图中重复这一过程, 并保证去掉的顶点在原图中不为度为 2 的顶点 (对于 $t(\geq 2)$ 阶树, 其总有至少 2 片叶子, 而原图中至多一个度为 2 的顶点, 故这可做到). 如此便可选出满足要求的 $n-1$ 个顶点及它们对应的边.

记最后一个顶点为 V_n, $f(V_n)$ 为一条不在该 n 阶 2-树中出现的边, 我们有该 n 阶 2−树中每一条边均为某条 $f(V_i)$ (因为该 n 阶 2-树中恰 $n-1$ 条边).

下面我们给 $f(V_i)$ 赋值 e_i, 使得 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 构成 $1, 2, \cdots, n-1$ 的一个排列, 并且, 对 $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{\substack{V_j \text{ 与 } V_i \text{ 相邻} \\ \text{且 } f(V_i) \neq V_iV_j}} e_i \equiv 0 \pmod{n}, \tag{1}$$

如此便有顶点 V_i 的权为 e_i $(1 \leq i \leq n)$ (模 n 意义下), (因 $f(V_i) \neq V_iV_j$ 且 V_j 与 V_i 相邻时, $V_jV_i = f(V_j)$), 顶点 V_n 的权为 0 (模 n 意义下).

下面我们证明 (1) 可做到.

由 $2 \nmid n$ 知可设 $n-1 = 6k+r$, $r = \{0, 2, 4\}$, $k \in \mathbb{N}$.

我们先将每个非空的 $\{e_j \mid V_j \text{ 与 } V_i \text{ 相邻且 } f(V_i) \neq V_iV_j\}$ $(1 \leq i \leq n)$ 分拆为若干不交的 3 元集和 2 元集的并 (由 (*) 知每个非空的这样的集合均至少 2 个元素, 故这可以做到).

设这样我们得到了 s 个 3 元集和 t 个 2 元集, $s, t \in \mathbb{N}$. 只需让它们每一个的和模 n 为 0, 则

$$3s + 2t = n - 1,$$

有 $2 \mid s$, 且 $\frac{1}{2}s \mid k$.

由引理, 存在 $\frac{1}{2}s$ 个 $\{1, 2, \cdots, 3k+1\}$ 的 3 元子集 $\{a_i, b_i, a_i+b_i\}$ $(1 \leq i \leq \frac{1}{2}s)$,

两两交为空, 且 $3k$ 与 $3k+1$ 中至多有一个出现在其中, 那么我们取如下的 s 个 3 元集

$$\{a_i, b_i, n-a_i-b_i\},\ \{n-a_i, n-b_i, a_i+b_i\}\ (1 \le i \le \frac{1}{2}s);$$

及如下的 t 个 2 元集

$$\{u, n-u\}\ (u \notin \{a_i, b_i, a_i+b_i\}\ (1 \le i \le \frac{1}{2}s) \text{ 且 } u \le \frac{n-1}{2})$$

这样的 3 元集和 2 元集就满足要求!

故 (1) 可做到, 我们得到了满足要求的标记方式, n 为正奇数且 $n \ge 5$ 时满足要求!

综上, 所求为全体正奇数.

(2) 所求为全体正偶数.

一方面, 由 (1) 结论知 $2 \mid n$.

另一方面, 对正偶数 n, $n=2$ 时其显然满足要求.

$n \ge 4$ 时, 类似于 (1) 中第一方面可知, 对任一 n 阶 2−树, 不存在使 n 个顶点的权模 n 互不相同的标记方式 (因为 $n \nmid \frac{n(n-1)}{2}$).

而对任一 n 阶 2−树, 由 (1) 中结论 $(*)$, 我们可以给其中 $n-1$ 个顶点 $V_1, V_2, \cdots, V_{n-1}$ 找到满足 $(*)$ 中条件的边 $f(V_1), \cdots, f(V_{n-1})$, 并记最后一个顶点为 V_n, $f(V_n)$ 为一条不在该 n 阶 2−树中出现的边, 下面我们给 $f(V_i)$ 赋值 e_i, 使得 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 构成 $1, 2, \cdots, n-1$ 的一个排列, 并且对 $n-1$ 个 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的 i, 有

$$\sum_{\substack{V_j \text{ 与 } V_i \text{ 相邻} \\ \text{且 } f(V_i) \ne V_iV_j}} e_j \equiv 0 \pmod{n}, \tag{2}$$

如此, 记 $e_n = n$, 便有对于满足 (2) 的 i, 顶点 V_i 的权为 e_i (模 n 意义下), 故该 n 阶 2-树中各顶点的权模 n 有 $n-1$ 个不同值.

下面我们证明 (2) 可做到.

类似于 (1) 的证明: 只需考虑对 s 个 3 元集和 t 个 2 元集 $(s, t \in \mathbb{N}, 3s+2t = n-1)$ 的情况, 设 $n-1 = 6k+r$, $r \in \{3, 5, 7\}, k \in \mathbb{N}$, 由 $3s+2t = n-1$ 有 $2 \nmid s$, 且 $\frac{1}{2}(s-1) \le k$.

由引理, 存在 $\frac{1}{2}(s-1)$ 个 $\{1, 2, \cdots, 3k+1\}$ 的 3 元子集 $\{a_i, b_i, a_i+b_i\}$ $(1 \le i \le \frac{1}{2}(s-1))$, 其两两交为空, 且 $3k$ 与 $3k+1$ 中至多有一个出现在其中, 那么我们取如下的 s 个 3 元集

$$\{a_i, b_i, n-a_i-b_i\},\ \{n-a_i, n-b_i, a_i+b_i\}\ (1 \le i \le \frac{1}{2}(s-1));$$

及如下的 t 个2元集

$$\{u, n-u\}\ (u \notin \{a_i, b_i, a_i+b_i\}\ (1 \le i \le \frac{1}{2}(s-1))\ 且\ u < \frac{n-1}{2}),$$

取 t 个及最后 3 个元素构成的 3 元集. (由于 $t < \frac{n-1-3s}{2} < \frac{n-1-3(s-1)}{2}$, 故这可以做到!)

如此, 除了最后一个集合外, 其余集合元素均被 n 整除, 故这些 3 元集和 2 元集就满足要求!

故 (2) 可做到, n 为正偶数且 $n \ge 4$ 时满足要求!

综上, 所求为全体正偶数. □

评注 此题很有难度, 考场内只有个别同学做出. 其难点有两个, 一是如何简单地确定每个顶点的权, 最简单的想法就是让每个顶点的权由它引出的一条边确定, 由此自然给出了文中的引理; 二是引理的证明, 基本想法就是先构造简单情况, 再寻找规律.