一个计数问题及其引伸

冯跃峰

有人在"组合万花筒"的数学群中贴了如下一个计数问题:

How many ways can one fill a 3×3 square girl with nonnegative integers such that no nonzero integer appears move that once in the same row or column and the sum of the number in every row and column equals?

这个问题当然不难, 但考虑该问题的引伸, 倒是一件颇为有趣的事.

我们先给出这个问题的解答.

【解答】 用 (i,j) 表示棋盘第 i 行第 j 列的格. 在格 (i,j) 中填数 p, 记为 $(i,j) = p$.

设棋盘所填的"最大数"为 x, 则 $4 \leq x \leq 7$.

(1) 当 $x = 7$ 时, 设 3×3 棋盘中恰含有 r 个 7 $(1 \leq r \leq 3)$.

易知 $r \neq 2$, 否则, 去掉两个 7 所在的行与列 (这些行列非 7 的数都是 0), 剩下唯一格, 只能填 7, 与 $r = 2$ 矛盾. 所以, $r = 1, 3$.

当 $r = 3$ 时, 设 $(1,i) = (2,j) = (3,k) = 7$, 则 i,j,k 是 1,2,3的一个排列, 此时有 $3! = 6$ 种方法.

当 $r = 1$ 时, 填 7 有 9 种方法, 7 所在的行列均含有 2 个 0, 有唯一填法. 不含 7 的行列均有 1 个 0 和 2 个非零数, 其非零数有 3 种可能: (1,6), (2,5),(3,4). 对每一种情形, 将 2 个非零数填入不含 7 的一个行, 有 2 种方法, 另一行也只能填这两个非零数, 有唯一方法. 此时有 $9 \times 3 \times 2 = 54$ 种方法.

(2) 当 $x = 6$ 时, 设 3×3 棋盘中恰含有 s 个 6, 同上可知, $s = 1, 3$.

当 $s = 3$ 时, 棋盘每行每列都是 6,1,0 的一个排列. 第 1 行有 $3! = 6$ 种填法, 第 2 行有 2 种填法, 第 3 行有 1 种填法, 此时有 $6 \times 2 = 12$ 种方法.

当 $s = 1$ 时, 填 6 有 9 种方法, 6 所在的行列其它 2 格均是 0,1 的排列, 各有 2 种填法. 设其余 4 格的填数为 a,b,c,d, 其中 a 所在的行列都填有 1, d 所在的

修订日期: **2019-09-29.**

行列都填有 0, 则 $a+b=a+c=6,\ b+d=c+d=7$.

所以 (以 a 为主元), $b=c=6-a,\ d=a+1$.

穷举试验只有 2 种可能: $a=2,4$, 此时有 $9\times 2^3=72$ 种方法.

(3) 当 $x=5$ 时, 设 3×3 棋盘中恰含有 t 个 5, 同上可知, $t=1,3$.

当 $t=3$ 时, 棋盘每行每列都是 5,2,0 的一个排列, 此时有 $6\times 2=12$ 种方法.

当 $t=1$ 时, 填 6 有 9 种方法, 6 所在的行列其它 2 格均是 0,2 的排列, 各有 2 种填法. 设其余 4 格的填数为 a,b,c,d, 其中 a 所在的行列都填有 2, d 所在的行列都填有 0, 则 $a+b=a+c=5, b+d=c+d=7$.

所以 (以 a 为主元), $b=c=5-a,\ d=a+2$.

穷举试验只有 1 种可能: $a=1$, 此时有 $9\times 2^2=36$ 种方法.

(4) 当 $x=4$ 时, 则由 4 的“最大性”可知, 每行每列恰有一个 4.

第 1 行的 4 有 3 种填法, 第 2 行的 4 有 2 种填法, 第 3 行的 4 有唯一方法. 所以, 填 4 有 $3\times 2=6$ 种方法.

设第 1 行另两格填数为 a,b, 则 $a+b=3$,有 4 种可能: $(a,b)=(0,3),(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$.

当填好第 1 行后, 其它格填数唯一确定, 此时有 $6\times 4=24$ 种方法. 由加法原理, 共有 $6+54+12+72+12+36+24=216$ 种方法. □

尽管问题很简单, 但若推广到一般情形, 则变成相当困难的问题.

【推广】 给定正整数 n,s, 在 $n\times n$ 棋盘的每个方格填一个自然数, 使每行每列没有非零数出现多于 1 次, 且每行每列各数的和都为 s, 问共有多少不同的填数方法?

这是一个容量很大的问题, 对一般的 n,s, 设不同的填数方法种数为 $q(n,s)$, 求出 $q(n,s)$ 的表达式是相当困难的.

我们可以考虑它的几个简单的特例.

【特例 1】 取 $s=1,2$, 则 $q(n,1)=q(n,2)=n!$.

实际上, $s=1,2$ 时, 将 s 分拆为互异正整数的和 (包括本身) 只有唯一方法, 从而棋盘每行每列都恰有一个 s, 其余数都为 0.

填第一行的 s 有 n 种方法, 填第 2 行的 s 有 $n-1$ 种方法, $\cdots$, 填最后一行的 s 有唯一方法, 从而 $q(n,s)=n!$.

【特例 2】 取 $s=3$, 则 $q(n,3)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\mathrm{C}_n^k A_n^{n-k}(k!)^2\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\right]$.

证明 分情况讨论如下.

当 $n=1$ 时, 显然有 $q(1,3)=1$, 结论成立.

下设 $n\geq 2$, 注意到 $3=1+2$, 又可按棋盘中含有多少个 3 进行分类讨论. 设 $n\times n$ 棋盘中恰含有 $n-k$ 个 3, 则 $0\leq k\leq n$.

易知 $k\neq 1$, 否则, 去掉 $n-1$ 个 3 所在的行与列 (这些行列非 3 的数都是 0), 剩下唯一格, 只能填 3, 与棋盘只有 $n-1$ 个 3 矛盾. 所以, $k=0,2,3,\cdots,n$.

当 $k=0$ 时, 棋盘每行每列恰有一个 3, 设第 i 行的 3 位于格 (i,a_i) $(1\leq i\leq n)$, 则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 从而有 $n!$ 种填法.

当 $2\leq k\leq n$ 时, 棋盘有 $n-k$ 个行与 $n-k$ 个列恰有一个 3.

设 $n-k$ 个 3 位于格 (p_i,q_j) $(1\leq i,j\leq n-k)$, 则选取 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-k}$ 这些行有 C_n^k 种方法: 选取 $q_1,a_2,\cdots,q_{n-k}$ 这些列, 并与 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-k}$ 搭配，有 A_n^k 种方法.

去掉 $n-k$ 个 3 所在的行与列 (其填数都被确定:非 3 的数都为 0), 剩下的格位于 k 行 k 列交叉所得的 $k\times k$ 棋盘中, 记该棋盘为 M_k.

在 M_k 中填数, 每行每列都恰有一个 1, 一个 2和 $n-2$ 个 0. 记其方法数为 $f(k)$, 则

$$q(n,3)=n!+\sum_{k=2}^{n}\mathrm{C}_n^k A_n^{n-k}f(k).$$

下面求 $f(k)$. 设 M_k 中的 k 个 1 位于格 (i,u_i) $(1\leq i\leq k)$, 则 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是 $1,2,\cdots,k$ 的一个排列, 有 $k!$ 种选法.

再设 M_k 中的 k 个 2 位于格 (i,v_i) $(1\leq i\leq k)$, 则 $v_i\neq u_i$, 于是 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 的一个错位排列, 有 $D(k)=k!\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}$ 种填法. 所以

$$f(k)=(k!)^2\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}.$$

故

$$q(n,3)=n!+\sum_{k=2}^{n}\left[\mathrm{C}_n^k A_n^{n-k}(k!)^2\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\right].$$

注意到 $f(k)=(k!)^2\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}$ 满足: $f(0)=1,f(1)=0$, 从而上式可合并为

$$q(n,3)=\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{C}_n^k A_n^{n-k}(k!)^2\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\right]. \qquad \square$$

同样可得,

$$q(n,4)=\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{C}_n^k A_n^{n-k}(k!)^2\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\right].$$

当 $s \geq 5$ 时, 求 $q(n,s)$ 的表达式有相当大的难度, 即使是求 $s=5$ 的特例: $q(n,5)$, 也不简单.

实际上, 因为 $5=1+4=2+3$, 棋盘中那些没有 5 的行列中, 可能若干行列所含非零数是 1,4, 另若干行列所含非零数是 2,3. 假定 p 个行列含 5, q 个行列含 1,4, r 个行列含 2,3, 讨论相当复杂. 此时, 改进算法显得尤为重要!

如果考虑问题的另一个特例: 取 $s=\frac{n(n+1)}{2}$, 则得到问题的一种变异.

【变异 1】 将 $1,2,\cdots,n$ 填入 $n \times n$ 棋盘的每个方格, 使每行每列都是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 有多少方法?

该问题恐怕也难轻易获解. 如果不局限于正方形棋盘, 则得到问题的另一种变异形式, 我们称之为 $m-$阶错位排列.

先将熟知的错位排列用 $2 \times n$ 棋盘来描述: 将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 填入 $1 \times n$ 棋盘, 每个方格一个数. 然后在棋盘下方增加一行变成 $2 \times n$棋盘, 再将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 填入增加的行中, 使 $2 \times n$ 棋盘每列的数互异, 我们称增加行的填数为第一行填数的错位排列.

由此, 可将错位排列推广到一般情形.

【变异 2】 将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 填入 $m \times n$ 棋盘, 每个方格一个数. 其中每一行都是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列, 且每列的数互异. 然后在棋盘下方增加一行变成 $(m+1) \times n$ 棋盘, 再将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 填入增加的行中, 使 $(m+1) \times n$ 棋盘每列的数互异, 我们称增加行的填数为前面 m 行填数的错位排列, 简称 $m-$阶错位排列.

显然, $1-$阶错位排列, 就是通常的错位排列.

对任何 $1 \leq m \leq n-1$, 记 $m-$阶错位排列的个数为 $D(m,n)$, 则熟知

$$D(1,n)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

现在的问题是, 对 $2 \leq m \leq n-1$, 能否求出 $D(m,n)$ 的表达式?

即使是 $m=2$ 的情形, 似乎也有相当的难度, 自感知识有限, 力不能及, 特将其写出来, 期望有读者能给出答案.