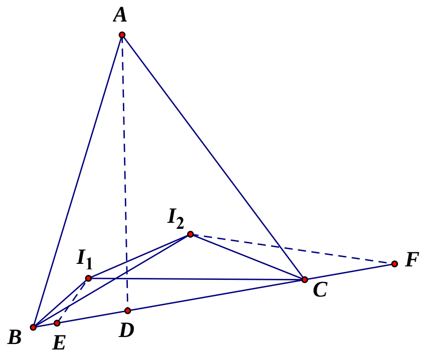
# 第三十三期问题征解解答与点评

牟晓生

**第一题** 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $D$ 为 $BC$ 边上一点 (不是中点), $I_1, I_2$ 为 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的内心. $\triangle CI_1I_2, \triangle BI_1I_2$ 的外接圆分别与直线 $BC$ 交于另外两点 $E, F$. 证明: $EI_1, FI_2, AD$三线共点.

(广西钦州 卢圣 供题)

证明 (根据成都七中杨明宇同学的解答整理):




设 $EI_1$ 与 $FI_2$ 交于点 $R$. 作 $B$ 关于 $AI_1$ 的对称点 $B_1$, 以及 $C$ 关于 $AI_2$ 的对称点 $C_1$. 注意到 $B_1, C_1$ 都在直线 $AD$ 上, 且 $AB_1=AB=AC=AC_1$, 故 $B_1$ 与 $C_1$ 重合, 记为点 $T$. 故

$$\angle I_1TI_2=\angle I_1TA+\angle I_2TA=\angle I_1BA+\angle I_2CA=\angle ABC.$$

由于 $I_1, E, C, I_2$ 共圆, $\angle RI_1I_2=\angle I_2CE=\frac{1}{2}\angle ABC$. 类似地 $\angle RI_2I_1=\frac{1}{2}\angle ABC$. 所以 $\angle I_1RI_2=\pi-\angle I_1TI_2$, 故 $R, I_1, T, I_2$ 共圆. 这样就有

$$\angle RTI_1=\angle RI_2I_1=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle ATI_1.$$

所以 $R$ 在 $AT$ 也就是 $AD$ 上. $\square$

**评注** 杭州二中来栩杰, 四川省绵阳中学钟科, 浙江省镇海中学袁昊喆, 长沙市南雅中学肖晶, 欧阳仁鼎, 黄叶, 叶骄杨, 石育锟, 重庆一中赵维捷, 临汾一

中丁阳, 江苏省海门中学张李铄, 江苏省海门中学朱嘉奕, 学军中学缪何玺, 重庆市巴蜀中学但流金, 加拿大高中段云迪, 人大附中陈锐韬, 华南师大附中冯宣瑞, 山东省实验中学孙永喆, 石家庄二中贾镐铮, 清华大学严君啸等同学以及山大附中和衡水一中团队也给出了本题的正确解答.

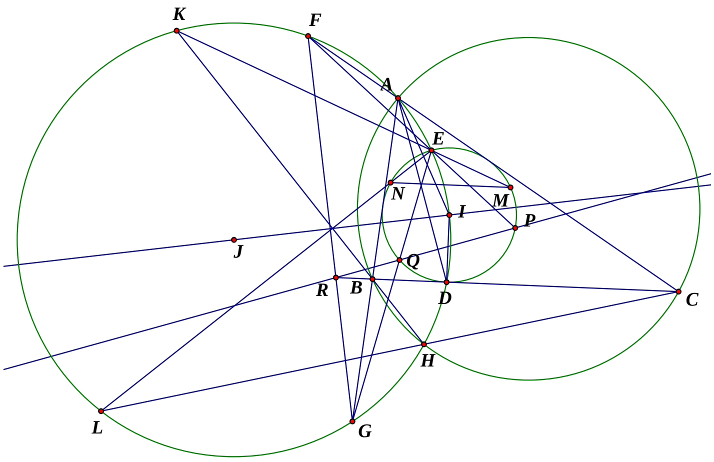
**第二题** $\triangle ABC\ (AB \neq AC)$ 的外接圆为圆 $O$, 内切圆为圆 $I$, 圆 $I$ 与边 $BC$ 切于点 $D$, 设三角形 $AID$ 的外接圆为圆 $J$,与圆 $I$,$O$ 分别交于另一点 $E, H$.

(1) 圆 $J$ 与直线 $AC$ 交于点 $F$, 与直线 $AB$ 交于点 $G$, 直线 $FE, GE$ 分别交圆 $I$ 于 $P, Q$. 直线 $BC$ 与 $FG$ 交于 $R$. 求证: $P, Q, R$ 三点共线.

(2) 直线 $BH, CH$ 分别交圆 $J$ 于 $K, L$. $KE, LE$ 分别与圆 $I$ 交于 $M, N$. 求证: $MN \parallel BC$ 且与直线 $PQ$ 关于直线 $IJ$ 对称.

(江苏省海门中学学生 朱嘉奕 供题)

**证明** (**根据学军中学缪何玺同学的解答整理**):




(1) 设 $\angle BAC$ 的外角平分线与 $BC$ 交于 $T$ 点, 则

$$\angle TAI = \angle TDI = 90^\circ \Rightarrow TI\text{为}\odot J\text{直径}, J\text{ 为 }TI\text{ 的中点}.$$

注意到 $\angle TAF = \angle TAG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A \Rightarrow TF = TG$.

又 $\angle TEI = \angle TDI = 90^\circ$ 可知 $TE, TD$ 为 $\odot I$ 两切线, $TE = TD$.

由于 $\widehat{EF} = \widehat{DG} \Rightarrow FG \parallel ED$,

$$\angle DRG = \angle FRT = \angle EDT = \angle EPD = \angle DQG,$$

则推出 $D, G, R, Q$ 共圆.

由两圆相交的性质 ($\odot(TEDG)$, $\odot(RQDG)$) 可推出

$$RQ \parallel TE.$$

同理 $RP \parallel TE$, 故而 $R, P, Q$ 共线.

(2) 由两圆相交的性质知 $LG \parallel BC$ 且 $\triangle DQN \sim \triangle DGL$. 故

$$\begin{aligned}\measuredangle(QN, BC) &= \measuredangle(QN, LG)\\ &= \angle QDG = \angle RDQ + \angle RQG\\ &= \angle RDQ + \angle EDQ\\ &= \angle EDT = 90^\circ - \measuredangle(IJ, BC),\end{aligned}$$

故 $QN \perp IJ$. 从而 $Q, N$ 关于 $IJ$ 对称, 同理 $P, M$ 关于 $IJ$ 对称, 从而 $PQ, MN$ 关于 $IJ$ 对称.

又 $TE, TD$ 关于 $IJ$ 对称, 由 $TE \parallel PQ$, 可知 $TD \parallel MN$, 即 $MN \parallel BC$. □

**评注** 北京市十一学校张锐翀, 长沙市南雅中学石育锟, 重庆市巴蜀中学但流金, 加拿大高中段云迪, 人大附中陈锐韬, 华南师大附中冯宣瑞, 山东省实验中学孙永喆, 石家庄二中贾镐铮, 清华大学严君啸等同学以及山大附中和衡水一中团队也给出了本题的正确解答.

**第三题** 设 $1 \le u \le t$ 为正整数. 证明:

$$\sum_{j=0}^{u}(-1)^j\binom{t+1}{j}(u-j)^t > 0.$$

(上海中学学生 杨铮 供题)

**解 (根据江苏省海门中学朱嘉奕同学的解答整理)**:

令

$$f(t,u) = \sum_{j=0}^{u}(-1)^j\binom{t+1}{j}(u-j)^t = \sum_{j=0}^{u-1}(-1)^j\binom{t+1}{j}(u-j)^t.$$

如果 $2 \le u \le t-1$, 则

$$\begin{aligned}f(t,u) &= \sum_{j=0}^{u-1}(-1)^j\binom{t+1}{j}(u-j)^t\\ &= \sum_{j=0}^{u-1}(-1)^j\binom{t+1}{j}\cdot\frac{u(t+1-j)-j(t+1-u)}{t+1}\cdot(u-j)^{t-1}\\ &= u\cdot\sum_{j=0}^{u-1}(-1)^j\binom{t}{j}(u-j)^{t-1} - (t+1-u)\sum_{j=1}^{u-1}(-1)^j\binom{t}{j-1}(u-j)^{t-1}\\ &= u\cdot\sum_{j=0}^{u-1}(-1)^j\binom{t}{j}(u-j)^{t-1} + (t+1-u)\sum_{j-1=0}^{u-2}(-1)^{j-1}\binom{t}{j-1}(u-j)^{t-1}\\ &= u\cdot f(t-1,u) + (t-u+1)f(t-1,u-1).\end{aligned}$$

由归纳法知对于这样的 $u$, $f(t,u)>0$. 剩下只用考虑 $u=1$ 及 $u=t$ 的情形. 容易计算得到 $f(t,1)=1$. 并且因为 $\sum_{j=0}^{t+1}(-1)^j\binom{t+1}{j}(x-j)^t=0$ 对任意 $x$ 都成立(次数为 $t$ 的多项式 $x^t$ 的 $t+1$ 阶差分为零), 代入 $x=t$ 得到 $f(t,t)=1$. 于是命题得证! □

**评注** 重庆市巴蜀中学但流金以及衡水一中田丰睿同学也给出了本题的正确解答.

**第四题** 证明: 对每个正整数 $n$, 都有一个 $n$ 次实系数多项式 $P(x)$, 满足

$$|P(x)-\arctan(x)|\le 2\cdot(\sqrt{2}-1)^n,\ \forall x\in[-1,1].$$

(耶鲁大学 牟晓生 供题)

**证明** (**根据山大附中王乐达, 王子彧同学的解答整理**):

先考虑 $n$ 为奇数的情况. 设 $T_{n+1}(x)$ 为 $n+1$ 次 Chebyshev 多项式:

$$T_{n+1}(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}+(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2}.$$

我们证明存在实数 $\alpha$ 使得 $x^2+1\mid \alpha T_{n+1}(x)+1$. 为此只要 $\alpha T_{n+1}(i)+1=0$, 也就是

$$\alpha=\frac{-1}{T_{n+1}(i)}=\frac{-2\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}.$$

所以 $|\alpha|<\frac{2}{(1+\sqrt{2})^{n+1}}=2(\sqrt{2}-1)^{n+1}$.

现在令 $Q(x)=\frac{\alpha T_{n+1}(x)+1}{x^2+1}$ 是一个 $n-1$ 次多项式, 则

$$Q(x)-\frac{1}{x^2+1}=\frac{\alpha T_{n+1}(x)}{x^2+1}.$$

熟知在 $-1\le x\le 1$ 时 $|T_{n+1}(x)|\le 1$, 所以

$$|Q(x)-\frac{1}{x^2+1}|\le|\alpha|<2(\sqrt{2}-1)^{n+1},\quad \forall x\in[-1,1].$$

接下来令 $P(x)=\int_0^x Q(t)\,dt$ 是一个 $n$ 次多项式, 则

$$|P(x)-\arctan(x)|=|\int_0^x(Q(t)-\frac{1}{t^2+1})\,dt|\le\int_0^x|Q(t)-\frac{1}{t^2+1}|\,dt.$$

故 $|P(x)-\arctan(x)|<2(\sqrt{2}-1)^{n+1}$ 对每个 $x\in[-1,1]$ 成立.

最后如果 $n$ 是偶数, 令 $P^*(x)$ 为上面给出的在 $n-1$ 时的多项式, 则当 $\epsilon$ 为充分小的正数时 $P(x)=\epsilon x^n+P^*(x)$ 满足条件. □

**评注** 有兴趣的同学可以尝试证明题目中的 $\sqrt{2}-1$ 是不可改进的.