

数学新星问题征解

第三十五期 (2019.11)

主持: 牟晓生

第一题. 设 $\triangle ABC$ 中, BC 中垂线交直线 AC, AB 于 D, E . 令 I_a 为 $\triangle ADE$ 的欧拉线, 类似定义 I_b, I_c . 令 T 是直线 I_a, I_b, I_c 围成的三角形的外心. 证明: T 在 $\triangle ABC$ 的欧拉线上.

(兰州一中学生 郝敏言 供题)

第二题. 给定实数 $t > \frac{1}{2}$, 以及实数 a, b, c 满足 $ab + bc + ca > 0$. 证明:

$$(a^2 + t - \frac{1}{3})(b^2 + t - \frac{1}{3})(c^2 + t - \frac{1}{3}) \geq t^3(ab + bc + ca)^{\frac{1}{t}}.$$

(青岛二中学生 陈晓琨 供题)

第三题. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是公差为 d 的递增的正整数等差数列 ($n > 2$), 满足

$$a_1 > d \cdot \text{lcm}(1, 2, \dots, n-1).$$

证明: 存在两两互异的素数 p_1, p_2, \dots, p_n , 使得 $p_i \mid a_i, \forall i$.

(山大附中学生 王子彧 供题)

第四题. 将一个 $n \times n$ 白色棋盘上的若干个格子染黑, 然后把同行同列上相邻的黑格用线段相连, 得到一个以黑格为顶点, 线段为边生成的图 G .

- (a) 若 G 中无圈, 求黑格个数的最大值;
- (b) 若 G 中无偶圈, 求黑格个数的最大值.

(深圳中学学生 池昊哲 温凯越 供题)