第 35 届 CMO 试题解答

严彬玮

(南京师范大学附属中学, 210000)

指导教师: 葛军 陈兴江

2019 年第 35 届 CMO 于 11 月 24 日至 11 月 30 日在武汉华中师大一附中举行, 我取得了满分的好成绩. 下面介绍我的解法, 请读者批评指正!

题 1 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{40}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{40} = 0$, 且对 $1 \le i \le 40$, 均有 $|a_i - a_{i+1}| \le 1$, 这里 $a_{41} = a_1$. 记 $a = a_{10}, b = a_{20}, c = a_{30}, d = a_{40}$.

(1) 求 $a + b + c + d$ 的最大值;

(2) 求 $ab + cd$ 的最大值.

解 (1) 由于 $a_{i+1} \le a_i + 1, a_{i+1} \ge a_i - 1$, 为了方便, 令 $a_{i+40} = a_i$, 有

$$\begin{aligned}a_1 + \cdots + a_{40} = &(a_5 + a_6 + \cdots + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + \cdots + a_{24}) + \\ &(a_{25} + a_{26} + \cdots + a_{34}) + (a_{35} + a_{36} + \cdots + a_4) \\ \ge &(10a - 5 - 4 - 3 - 2 - 1) + (10b - 25) + 10c - 25 + 10d - 25 \\ = &10(a + b + c + d) - 100.\end{aligned}$$

因此 $a + b + c + d \le 10$. 当

$$a_1 = 1.5, a_2 = 0.5, a_3 = -0.5, a_4 = -1.5, a_5 = -2.5, a_6 = -1.5,$$
$$a_7 = -0.5, a_8 = 0.5, a_9 = 1.5, a_{10} = 2.5, a_{i+10} = a_i$$

时取等.

(2) 由于

$$\begin{aligned}a_1 + \cdots + a_{40} \ge &a - 15 + a - 14 + \cdots a + a - 1 + \cdots + a - 4 + \\ &b - 5 + b - 4 + \cdots + b + b - 1 + \cdots + b - 14 \\ = &(a + b) \times 20 - 250.\end{aligned}$$

修订日期: **2019-12-22.**

因此 $a+b\le \frac{25}{2}$.

取所有 $a_1\sim a_{40}$ 为相反数可知 $a+b\ge -\frac{25}{2}$.

同理 $|c+d|\le \frac{25}{2}$.

若 $a,\ b$ 不同号, 有

$$ab+cd\le \frac{(c+d)^2}{4}\le \frac{625}{16}<\frac{425}{8}.$$

$c,\ d$ 不同号的情况同理;

若 $a,\ b,\ c,\ d$ 均非负, 有

$$ab+cd\le \frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{4}\le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}\le 25<\frac{425}{8};$$

若 $a,\ b\ge 0,\ c,\ d\le 0$, 设

$$|a+b|=m,\ |c+d|=n,$$

其中 $m,\ n\le \frac{25}{2}$. 由

$$(a-d)+(b-c)\le 10+10=20$$

知 $m+n\le 20$. 记 $m+n=k$, 不妨设 $m\ge \frac{k}{2},\ m\le k$,

$$ab+cd\le \frac{m^2+n^2}{4}=\frac{m^2+(k-m)^2}{4},$$

以 m 主元二次函数在 $m\ge \frac{k}{2}$ 时单调增.

当 $k\le \frac{25}{2}$ 时,

$$ab+cd\le \frac{k^2}{4}=\frac{625}{16}<\frac{425}{8}.$$

当 $k>\frac{25}{2}$ 时,

$$ab+cd\le \frac{\left(\frac{25}{2}\right)^2+\left(k-\frac{25}{2}\right)^2}{4}\le \frac{\left(\frac{25}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}{4}=\frac{425}{8}.$$

当

$$a=b=\frac{25}{4},\ c=d=\frac{-15}{4},\ ab+cd=\frac{425}{8},$$

$$a_1=a-9,\ a_2=a-8,\ \cdots,\ a_9=a-1,$$

$$a_{11}=a-1,\ a_{12}=a-2,\ \cdots,\ a_{15}=a-5,$$

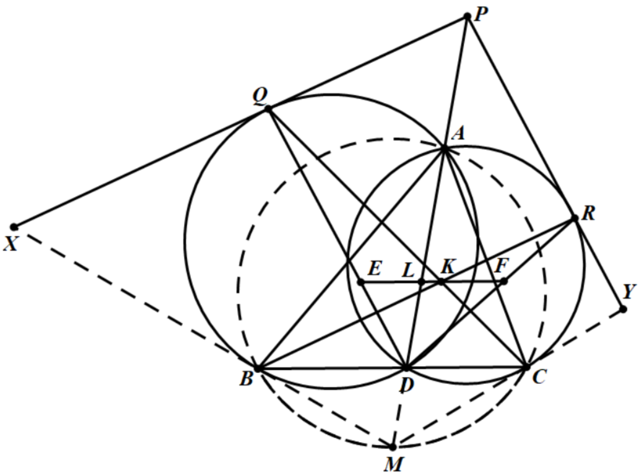
$$a_{16}=b-4,\ a_{17}=b-3,\ \cdots,\ a_{19}=b-1,$$

$$a_{21}=b-1,\ a_{22}=b-2,\ \cdots,\ a_{35}=b-15,$$

$$a_{36}=a-14,\ a_{37}=a-13,\ \cdots,\ a_{40}=a-10$$

时取等. □

题 2 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D. 点 P 是线段 DA 延长线上一点, PQ 与 $\triangle ABD$ 的外接圆相切于点 Q (Q, B 在直线 AD 同侧), PR 与 $\triangle ACD$ 的外接圆相切于点 R (R, C 在直线 AD 同侧). 线段 BR, CQ 交于点 K. 过点 K 作 BC 的平行线, 分别与 QD, AD, RD 相交于点 E, L, F. 证明: $EL = FK$.



证明 作 ΔABC 外接圆 $\odot O$, 设AD交 $\odot O$ 于 M, 设 $\odot ADB$ 为 $\odot O_1$, 半径为 r_1, $\odot ADC$ 为 $\odot O_2$, 半径为 r_2. 延长 MB, PQ 交于 X, PR, MC 交于 Y (若 $PQ \parallel MB$, 则 X 不存在, 令 $\angle PXM = 0°$, $\angle XQB = 90° = \angle XBQ$; 若 $PR \parallel MC$, 则 Y 不存在, 令 $\angle PYM = 0°$, $\angle YRC = 90° = \angle YCR$).

(1) 我们先证明 $BCRQ$ 共圆. 由

$$
\begin{aligned}
\angle BQR + \angle BCR &= 360° - \angle PQR - \angle XQB - \angle BCM - \angle YCR \\
&= 360° - (360° - \frac{\angle QPR}{2} - \frac{\angle BMC}{2} - \frac{\angle PYM}{2} - \frac{\angle PXM}{2}) \\
&= 180°.
\end{aligned}
$$

故 $BCRQ$ 共圆. 有 $\frac{RK}{KQ} = \frac{RC}{QB}$.

(2) 我们再证明 $\frac{EL}{LF} = \frac{FK}{KE}$. 由正弦定理:

$$EL = \frac{DL\sin\angle EDL}{\sin\angle LED},\ LF = \frac{DL\sin\angle FDL}{\sin\angle LFD}.$$

而由 $EF \parallel BC$,

$$\sin\angle LED = \sin\angle QDB = \frac{QB}{2r_1},\ \sin\angle LFD = \frac{RC}{2r_2}.$$

而

$$\frac{\sin\angle QDA}{\sin\angle RDA} = \frac{PQ\sin\angle PQD}{PD} \times \frac{PD}{PR\sin\angle PRD} = \frac{\sin\angle QBD}{\sin\angle RCD},$$

故

$$\frac{EL}{LF}=\frac{\sin\angle LFD}{\sin\angle LED}\times\frac{\sin\angle EDL}{\sin\angle FDL}=\frac{RC}{QB}\times\frac{r_1}{r_2}\times\frac{\sin\angle QBD}{\sin\angle RCD}.$$

而

$$\frac{FK}{KE}=\frac{\sin\angle BRD\times RK}{\sin\angle CQD\times KQ}\times\frac{\sin\angle QDB}{\sin\angle RDC}=\frac{RC}{QB}\times\frac{BD}{RB}\times\frac{QC}{CD},$$

由 $\angle BAD=\angle CAD$ 有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{r_1}{r_2}.$$

而由于 $BCRQ$ 共圆, 因此

$$\frac{QC}{RB}=\frac{\sin\angle QBD}{\sin\angle RCD}.$$

故

$$\frac{FK}{KE}=\frac{RC}{QB}\times\frac{r_1}{r_2}\times\frac{\sin\angle QBD}{\sin\angle RCD}.$$

可得

$$\frac{EL}{LF}=\frac{FK}{KE}.$$

故

$$\frac{LF}{EL}=\frac{KE}{FK},\ \frac{LF+EL}{EL}=\frac{KE+FK}{FK}.$$

因此 $EL=FK$. 证毕. □

题 3 设 S 是一个 35 元集合, F 是由一些 S 到自身的映射构成的集合. 对于正整数 k, 称 F 具有性质 $P(k)$, 如果对于任意 $x,\ y\in S$, 都存在 F 中的 k 个映射 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_k$ (可以相同), 使得 $f_k(\cdots(f_2(f_1(x)))\cdots)=f_k(\cdots(f_2(f_1(y)))\cdots)$.

求最小正整数 m, 使得所有具有性质 $P(2019)$ 的 F 都具有性质 $P(m)$.

解 m 最小值为 595, 理由如下.

(1) 先证明 $m\le 595$.

若 $m>595$, 设 m 最小值为 t, 则必存在 $x,\ y,\ x\ne y$, 使得对所有 $f_1\cdots f_k\in F$, 满足 $f_k\left(f_{k-1}\left(\cdots\left(f_1\left(x\right)\right)\right)\cdots\right)=f_k\left(f_{k-1}\left(\cdots\left(f_1\left(y\right)\right)\right)\cdots\right)$ 的 k 均有 $k\ge t$ (由于 F 满足 $P(2019)$ 所以存在 $f_1,\ \cdots,\ f_k$).

对于每一个 f_i, 定义 g_i: 对所有

$$f_i(a)=b,\ g_i(a)=b,\ f_i(c)=d,\ g_i(c)=d.$$

$b\ne d$ 时, $g_i(a,\ c)=(b,\ d)$, $b=d$ 时, $g_i(a,\ c)=b$ (此时的数组为不计顺序的二元集, 为了方便写成数组的形式). 因此必定存在 $x,\ y,\ x\ne y$, $(x,\ y)$ 在 F 中映射

至少 k 次方可变为一个数字而非数组. 由于 $k \geq 596$, $\mathrm{C}_{35}^{2}=595$, 而 $(x,\ y)$ 映射 0 次到 $k-1$ 次之后均为数组, 否则与 k 最小值矛盾. 记 $g_0(x,\ y)=(x,\ y)$, 必存在 $i,\ j,\ i\neq j$, 满足

$$g_i(\cdots(g_1(x,\ y))\cdots)=g_j(\cdots(g_i(\cdots(g_1(x,\ y))\cdots))).$$

此时去除 $g_i\sim g_{j-1}$ 之后, $g_k(\cdots(g_j(g_{i-1}(\cdots(x,\ y)\cdots))))$ 为一个数, 而少于 k 次映射, 矛盾. 因此 $m\leq 595$.

(2)再证明 $m\geq 595$. 不妨令 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 35\}$, 取 $F=\{f_A,\ f_B\}$, 其中

$$f_A(x)=x+1(\mathrm{mod}35),\ f_B(x)\equiv\begin{cases}x & x\neq 1(\mathrm{mod}35)\\ 2 & x=1(\mathrm{mod}35)\end{cases}(\text{即}f_A(35)=1).$$

此时先证明 F 满足 $P(2019)$: 对任意 $x,\ y$, 如(1)时定义 $g_A,\ g_B$, 在 f_A 中操作至多 34 次可使 (x,y) 中有一个变为 1, 设为 $(1,n)$. $n=1$ 时已满足, $n\neq 1$ 时, 则 $g_B(1,n)=(2,n)$.

令 $g_C=g_B\circ g_A^{(34)}$, 则

$$g_C^{(n-2)}(g_B(1,\ n))=g_C^{(n-2)}(2,\ n)=g_C^{(n-3)}(2,\ n-1)=\cdots=g_C(2,\ 3)=2.$$

共计操作了至多 $34+35\times(n-2)+1\leq 35^2<2019$ 次. 因此 F 满足 $P(2019)$.

下证 F 不满足 $P(594)$. 取 $(2,19)$, 则对任意 $x\neq y$, 令

$$h(x,y)\equiv\pm(x-y)(\mathrm{mod}35),$$

$h(x,y)$ 取 $|x-y|$, $35-|x-y|$ 中较小的一个, 则 $h(2,19)=17$. 考虑只有 $g_B(1,2)=2$ 是唯一一个数组 $\to$ 数的方法, 而 $h(1,2)=1$,

不考虑自身映射时, $x\neq y,\ x\neq 1,\ y\neq 1$ 只能映射到 $(x+1,\ y+1)$ (模 35 意义下, 下文均在模 35 意义下).

不妨设从 $(2,19)$ 到 2 至少需 P 次映射, 则每一次映射后所得到数组互不相同, 以 $(1,2)$ 倒推:

(I) $x\neq y,\ x\neq 2,\ y\neq 2$ 时 $(x,\ y)$ 只能由 $(x-1,\ y-1)$ 映射到 $(x,\ y)$.

(II) $y\neq 1,\ x=2$ 时可以从 $(1,\ y)\to(x,\ y)(B)$ 或从 $(1,\ y-1)\to(2,\ y)(A)$. $y=1,\ x=2$ 时只可以从 $(35,\ 1)\to(1,\ 2)$ (A 映射).

因此有 $(1,\ 2)\leftarrow(35,\ 1)\leftarrow\cdots\leftarrow(3,\ 4)\leftarrow(2,\ 3)$. 此时所有 $x\neq y$, $h(x,\ y)=1$ 的数组均出现过了$(2,3)$为(II)情况, 但 $(1,\ 2)\to(2,\ 3)(A)$ 或 $(1,\ 3)\to(2,\ 3)(B)$, 而 $(1,\ 2)$ 出现过了, 由每次映射后所得数组互不相同有 $(2,\ 3)\leftarrow(1,\ 3)\leftarrow(35,\ 2)$, B 映射 $(1,\ 35)\to(2,\ 35)$, 而 $h(1,\ 35)=1$ 已出现. 故 $(35,\ 2)\leftarrow(34,\ 1)\leftarrow\cdots\leftarrow(2,\ 4)$, 到此时所有 $x\neq y$, $h(x,\ y)=2$ 数组已出现, 对于所有的 $i=$

$2,\ 3,\ \cdots 16$, 若 $h(x,\ y)=i$ 的(x, y)均已出现过, 且倒推到了 $(2,\ (36-i))$ 这个数, 则 $(2,\ (36-i))$ 若由 $(1,\ 36-i)$ 推出, 则 $h(1,\ 36-i)=i$ 已出现, 矛盾. 因此 $(2,\ (36-i))$ 由 $(1,\ 35-i)$ 推出.

若已倒推到 $(2,\ 2+i)$, 则若 $(1,\ 1+i)\rightarrow(2,\ 2+i)$, $h(1,\ 1+i)=i$ 已出现, 矛盾. 因此 $(2,\ 2+i)$ 由 $(1,\ 2+i)$ 推出, 故

$$
\begin{aligned}
2 &\leftarrow(1,\ 2)\leftarrow(35,\ 1)\leftarrow\cdots\leftarrow(2,\ 3)\leftarrow(1,\ 3)\leftarrow(35,\ 2)\leftarrow(34,\ 1)\leftarrow\cdots\leftarrow(2,\ 4)\\
&\leftarrow(1,\ 4)\leftarrow\cdots\leftarrow(34,\ 2)\leftarrow(33,\ 1)\leftarrow\cdots\leftarrow(1,\ 5)\leftarrow\cdots\leftarrow(2,\ 18)\\
&\leftarrow(1,\ 18)\leftarrow\cdots\leftarrow(2,\ 20)\leftarrow(1,\ 19)\leftarrow\cdots\leftarrow(19,\ 2)
\end{aligned}
$$

共用了 $17\times35=595$ 次映射. 因此 F 不满足 $P(594)$.

证毕. $\square$

题 4 求最大实数 c, 使得下述结论对于所有整数 $n\geq3$ 成立: 设 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 是圆周上的 n 条弧 (每条弧都包含自身的端点), 如果存在至少 $\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^3$ 个三元组 $(i,\ j,\ k)$, 满足 $1\leq i<j\leq n$, 且 $A_i\cap A_j\cap A_k\neq\varnothing$, 则存在 $I\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 满足 $|I|>cn$, 且 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\neq\varnothing$.

解 $c=\frac{\sqrt{6}}{6}$, 理由如下:

(1) 先证 $c=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时命题成立.

对于所有位置上的端点, 若存在两个端点重合, 则可以移动其中一个非常短的距离, 使得其所在弧稍微变长一点点而不影响任何交关系(即交是否为空集不会改变).

设端点为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$. 设在每一个端点处有 x_i 个弧包含了 a_i. 在每个端点处记录所有三元组, 其中一段弧以该端点为端点, 另外两段弧包含该端点, 他们交非空, 则求和得到 $T=\sum\limits_{i=1}^{2n}\mathrm{C}_{x_{i-1}}^2$ 个.

另一方面, 每个三元组, 只要他们交非空, 他们交为一小段弧(已知端点不重). 这一小段弧的 2 个端点均记录了这个三元组各一次. 此时每个三元组被计至少 2 次. 故 $T\geq2\times\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^3$, 即

$$\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{C}_{x_{i-1}}^2\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2}.$$

不妨设 $x_1=\max\{x_1,\ \cdots,\ x_{2n}\}$, 有 $2n\times\mathrm{C}_{x_1-1}^2\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2}$. 故

$$(x_1-1)(x_1-2)\geq\frac{(n-1)(n-2)}{6}>\frac{(n-\sqrt{6})(n-2\sqrt{6})}{6}=(\frac{\sqrt{6}}{6}n-1)(\frac{\sqrt{6}}{6}n-2).$$

因此 $x_1>\frac{\sqrt{6}}{6}n$. 故 $C=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取包含 x_1 的所有弧即可.

下证 $C \leq \frac{\sqrt{6}}{6}$.

取充分大的 n, 将圆周分为 n 段圆弧, A_i 为第 i 段圆弧到第 $i+\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+50\right]$ 段圆弧之并(第 i 段圆弧 $=$ 第 $n+i$ 段圆弧), 则只要 $i<j<k,\ i-k \leq \left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+50\right]$ 知 $A_i \bigcap A_j \bigcap A_k \neq \varnothing$ 这样的 $(i,\ j,\ k)$ 共有至少

$k-i=2$ 时, n 组,

$k-i=3$ 时, $2n$ 组,

$\vdots$

$k-i=\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+50\right]$ 时，$\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+49\right]n$ 组.

至少有

$$n \times \frac{\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+49\right]\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+50\right]}{2} > \frac{n^3}{2\times 6} > \frac{1}{2} \times \mathrm{C}_n^3$$

组, 而对于每一个圆周上的点, 包含其的圆弧数至多有

$$\left[\frac{\sqrt{6}}{6}n+50\right]+1 < \frac{\sqrt{6}}{6}n+100$$

个, 即 $m \leq \frac{\sqrt{6}}{6}n+100$. 故 $\frac{m}{n} \leq \frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{100}{n}$, $n \to \infty$ 时, 有若 $c > \frac{\sqrt{6}}{6}$, $c=\frac{\sqrt{6}}{6}+\varepsilon$, $\frac{\sqrt{6}}{6}+\varepsilon < \frac{m}{n} \leq \frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{100}{n}$, 矛盾.

因此 c 最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. □

题 5 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 定义如下: a_1 是大于 1 的整数, 对 $n \geq 1$, $a_{n+1}=a_n+P(a_n)$, 其中 $P(a_n)$ 表示 a_n 的最大素因子. 证明: 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 中有完全平方数.

证明 若否, 令 $b_n=\frac{a_n}{p(a_n)}$.

(1) 必存在 n 使得 $p(a_n) \mid b_n$. 若否, 取

$$p(a_n)\times b_n,\ p(a_{n+1})\times b_{n+1},\ \cdots,\ p(a_l)\times b_l,$$

l 为比 n 大的第一个使得 $p(a_l)$ 与 $p(a_n)$ 不同的数.

若 $b_l \geq b_n$, 设 $b_l=p(a_n)\times t$. 有

$$b_n \leq p(a_n)\times t < p(a_l)\times t.$$

因此 $n \sim l-1$ 中有一个 n' 满足 $p(a_n) \mid b_{n'}$, 而 $p(a_{n'})=p(a_n)$, 矛盾.

(2) 令 $c_n=\frac{b_n}{p(a_n)}$, 取所有 $\{c_n\}$ 整值中最小值, 不妨设为 c_i, 设 $p(a_i)=p$, $a_i=p^2c_i$, 考虑比 i 大的第一个 j 满足 $p(a_j)\neq p$, 设为 q, 即

$$p^2c_i \to \cdots \to pq\left(\frac{b_j}{p}\right)$$

(I) 若 $\frac{b_j}{p} > c_i$, 则 pqc_i 一项在 a_ia_j 之间且最大素因子 $\geq q$, 矛盾.

(II) 若 $\frac{b_j}{p}<c_i$, 若 $p\left(\frac{b_j}{p}\right)\sim pc_i$ 中无 $>q$ 素因子, 有

$$p^2c_i\to\cdots\to pq\left(\frac{b_j}{p}\right)=q\times b_j\to\cdots\to qpc_i\to\cdots\to q^2\left(\frac{b_j}{p}\right)$$

$\frac{b_j}{p}<c_i$, 与 c_i 最小性矛盾. 因此 $p\left(\frac{b_j}{p}\right)\sim pc_i$ 中存在比 q 大素因子. 设第一个出现的含大于 q 素因子项为 p_1t_1q.

(III) $pq\left(\frac{b_j}{p}\right)\to\cdots\to qp_1t_1,\ t_1<c_1$, 如(I)知 $t_1\le\frac{b_j}{p}$. 若 $qt_1\sim q\frac{b_j}{p}$ 中无比 p_1 大素因子, 同(II)矛盾. 设 $qt_1\sim q\frac{b_j}{p}$ 中第一个出现的含大于 p_1 素因子的项为 p_2t_2, 且有 $t_1<\frac{b_j}{p}$. 因此有 $qp_1t_1=p_1(qt)\to\cdots\to p_1p_2t_2$, 如(III)知 $t_2<t_1$, 同样找到 $p_1t_2\sim p_1t_1$ 中第一个出现的含大于 p_2 素因子数 p_3t_3. 这样一直找下去可找到 $t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots$, 由正整数构成的递减数列, 矛盾. 故 $\frac{b_j}{p}=c_i$ 且

$$p^2c_i\to\cdots\to pqc_i=q(pc_i)\to\cdots\to qqc_i.$$

对 q^2c_i 同样操作, 不妨记

$$q^2c_i\to\cdots\to qq_1c_i\to\cdots\to q_1^2c_i$$

$$q_1^2c_i\to\cdots\to q_1q_2c_i\to\cdots\to q_2^2c_i$$

$$\cdots$$

找一个素因子 u 使得 $(u,\ c_i)=1$ 且 $u>qc_i$. 设 $u\in(q_kc_i,\ q_{k+1}c_i)$, 但是

$$q_k^2c_i\to\cdots\to q_kq_{k+1}c_i$$

中有一项为 q_ku. 而 $u>q_k$, 因此 $u=q_{k+1}$. 则

$$q_kq_{k+1}=q_kq_{k+1}c_i,\ c_i=1,$$

与 $\{a_n\}$ 中无平方数矛盾.

综上, 命题证毕. □

题 6. 是否存在正实数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{19}$ 同时满足以下两个条件? 请证明你的结论.

(I) 多项式 $P(x)=x^{20}+a_{19}x^{19}+\cdots+a_1x+a_0$ 无实根.

(II) 对任意整数 $0\le i<j\le 19$, 交换 $P(x)$ 的 x^i 和 x^j 的系数所得的多项式均有实根.

解 存在, 理由如下: 取 $b_{18}>b_{16}>\cdots>b_2>b_0>b_1>\cdots>b_{17}>b_{19}$. 令

$$h(x)=\frac{b_{19}}{x}+\frac{b_{18}}{x^2}+\cdots+\frac{b_1}{x^{19}}+\frac{b_0}{x^{20}}$$

当 $x\le-1$ 时, 求导可知 x 极小时 $h'(x)<0$, $x\to-\infty$ 时 $h(x)<0$. 因此 $x\le-1$

时 $h(x)$ 有最小值, 设在 $x=x_0$ 处取到, 有 $h(x_0)<0$. 令

$$\begin{aligned}h_{i,\,j}(x)=&h(x)+\frac{b_i}{x^{20}-j}+\frac{b_j}{x^{20}-i}-\frac{b_i}{x^{20}-i}-\frac{b_j}{x^{20}-j}\\=&h(x)-\frac{(b_i-b_j)(x^i-x^j)}{(x^{20}-i)(x^{20}-j)}.\end{aligned}$$

对于 $x\le -1$ 的情况, 当 i 为偶, j 为奇时 $b_i>b_j,\ x^i>x^j$.

$i,\ j$ 均为奇且 $i>j$ 时, $b_i<b_j,\ x^i<x^j$.

$i,\ j$ 均为偶且 $i>j$ 时, $b_i>b_j,\ x^i>x^j$.

因此任取 $x\le -1$, 对任意 $i,\ j\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 19\}$, $i\neq j$, 有 $h_{i,\,j}(x)<h(x)$. 令 $c=\max\{h_{i,\,j}(x_0)\}$, 则 $c<h(x_0)$. 取 $a_{20}=h(x_0)-\varepsilon$ 满足 $h(x_0)-\varepsilon>c,\ a_{20}<0,\ \epsilon>0$. 令

$$a_t=-\frac{b_t}{a_{20}},\ t\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ 19\},$$

则 $a_t>0$. 此时

$$p(x)=-\frac{x^{20}}{a_{20}}(\frac{a_{19}}{x}+\frac{a_{18}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^{20}}-a_{20}).$$

下证 $p(x)$ 满足条件.

$x\le -1$ 时,

$$p(x)\ge\frac{x^{20}}{-a_{20}}(h(x_0)-h(x_0)+\varepsilon)>0.$$

$x\in(-1,\ 0)$ 时,

$$\begin{aligned}p(x)\ge&(a_{18}x^{18}+a_{19}x^{19})+\cdots+(a_0+a_1x)\\>&(a_{18}x^{18}+a_{19}x^{19})+\cdots+(a_0+a_0x)\\>&0.\end{aligned}$$

$x>0$ 时, $p(x)>0$.

因此 $p(x)$ 无根. 而交换 $a_i,\ a_j$ 之后, 代入 $x=x_0$, 有

$$x^{20}+x^{20}\times(\frac{-1}{a_{20}})\times h_{i,\,j}(x_0)\le x^{20}\times\frac{(-1)}{a_{20}}\times(-a_{20}+c)<0.$$

而 $x>0$ 时多项式无上界, 所以交换后多项式必有根, 证毕! □