预给径向半径的凸多边形的最大内径问题

李先颖

本文主要讨论和解决冷岗松教授提出的如下关于平面凸集的问题:

命题 1 如果一个平面上的凸多边形 P 内存在一点 K, 过 K 的任意直线与 P 相交形成的截线段的长度均不小于 1, 则 P 包含一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的圆.

事实上, 对于满足命题 1 的平面凸多边形 P, 取 P 所包含的一个极大的圆 Ω, 则 Ω 至少与 P 的至少三条边（或者两条平行的边）相切.

(i) 若 Ω 与 P 的两条平行的边相切, 由凸性可知 P 一定位于这两条平行线之间. 注意到过 K 作垂直于这两条平行线方向的截线段长度不小于 1, 因此这两条平行线之间的距离至少为 1, 从而 Ω 的半径至少为 $\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4}$, 命题成立.

(ii) 若 Ω 与 P 的至少三条边相切, 由凸性可知 P 一定包含在这三条边所在直线围成的三角形内部. 注意到该三角形也满足命题 1 所描述的条件, 并且 Ω 作为该三角形的内切圆就是它所包含的最大的圆, 所以只需要证明命题对于三角形成立即可.

至此, 我们将平面任意凸多边形的问题转化成了平面三角形的问题, 换句话说, 命题 1 等价于:

命题 2 如果 $\triangle ABC$ 内存在一点 K, 过 K 的任意直线与 $\triangle ABC$ 相交形成的截线段的长度均不小于 1, 则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

我们证明一个更强的结论:

命题 3 如果 $\triangle ABC$ 内存在一点 K, 过 K 作三条分别垂直于 AI, BI, CI 的直线 (I 为 $\triangle ABC$ 内心), 与 $\triangle ABC$ 相交形成的截线段的长度均不小于 1, 则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

事实上, 设过 K 作垂直于 AI 的直线交直线 AI 于 A_0, 且该直线与射线 AB, AC 相交形成的截线段长度为 l_A. 类似定义 $B_0, l_B; C_0, l_C$.

修订日期: **2019-12-14.**

根据位似, 我们有

$$l_A=\frac{2r}{\cos(A/2)}\cdot\frac{AA_0}{AI}.$$

由条件, $l_A\geq 1$, 所以

$$\frac{AA_0}{AI}\geq\frac{\cos(A/2)}{2r}. \tag{1}$$

设 $\triangle ABC$ 的旁心分别为 I_A,I_B,I_C, 注意到 AA_0,BB_0,CC_0 分别为点 K 到 $\triangle I_AI_BI_C$ 三边的距离, 根据面积, 我们有

$$\sum_{cyc}\frac{AA_0}{AI_A}=1. \tag{2}$$

由 (1), (2), 以及$AI=AI_A\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$, 有

$$r\geq\frac{1}{2}\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

所以, 要证明$r\geq\frac{\sqrt{3}}{4}$, 只需要证明如下不等式:

命题 4 对任意$\triangle ABC$, 有

$$\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3}$$

我们给出命题 4 的两个证明:

证明 1 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC=y+z,CA=z+x,AB=x+y$, 则 (3) 等价于

$$\sum_{cyc}\sqrt{x^3(y+z)}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x+y+z)\prod_{cyc}(y+z)}. \tag{4}$$

将 (4) 左右两边平方, 等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}x^3(y+z)+2\sum_{cyc}\sqrt{y^3z^3}\sqrt{(x+y)(x+z)}\\&\qquad\geq\frac{3}{4}\left(\sum_{cyc}x^3(y+z)+2\sum_{cyc}y^2z^2+4xyz\sum_{cyc}x\right).\end{aligned} \tag{5}$$

将 (5) 中的根式项利用 Cauchy 不等式 (用两次) 放缩

$$2\sqrt{(x+y)(x+z)}\geq(x+\sqrt{yz})+(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}).$$

将 (5) 加强为

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}x^3(y+z)+4xyz\sum_{cyc}\sqrt{yz}+4\sum_{cyc}x^2(\sqrt{y^3z}+\sqrt{yz^3})\\&\qquad\geq 2\sum_{cyc}y^2z^2+12xyz\sum_{cyc}x.\end{aligned}$$

等价于

$$\sum_{cyc}(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2(yz(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2+4x^2\sqrt{yz}-2xyz)\geq 0. \tag{6}$$

最后, 因为

$$yz(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2+4x^2\sqrt{yz}-2xyz\geq 4\sqrt{y^3z^3}+4x^2\sqrt{yz}-2xyz\geq 6xyz>0,$$

故 (6) 成立, 命题得证. □

证明 2 (该方法属于上海中学黄嘉俊同学)

由

$$\sum_{cyc}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1,$$

可知 (3) 等价于

$$\sum_{cyc}\frac{\cos\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\frac{B}{2}}\geq 0. \tag{7}$$

令

$$f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}/2}{\tan x}, x\in(0,\pi/2),$$

则

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{\sin^3 x}(2\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x)\\&=\frac{1}{\sin^3 x}(\cos^4 x-\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+2)\\&>\frac{1}{\sin^3 x}(-1/4-\sqrt{3}+2)\\&>0.\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为 $(0,\pi/2)$ 上的凸函数, 由 Jensen 不等式

$$\sum_{cyc}f(A/2)\geq 3f(\pi/6)=0.$$

故 (7) 成立, 命题得证. □

杨路教授用他自己创作的软件 bottema 给出了命题 4 的机器证明, 我们将其作为附录.

```
> read bottema2015;
> sgm(cos(A/2)*tan(B/2)*tan(C/2));
```

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

```
> prove(%>=sqrt(3)/2);
```

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

Start to solve the left polynomial , 0.171

Start to solve the right polynomial , 0.187

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)-T$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(z+x)}}}{yz}+\frac{\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}}}{zx}+\frac{\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(y+z)(z+x)}}}{xy}-T$$

LpolypqT: length= , 2, *T degree :=* , 2

RpolypqT: length= , 19, *T degree :=* , 8

Start to eliminate T

finding the border curve(s) , 0.328

OK

all right

all right

found the border curve(s)

finding the intersection point(s) , 0.328

1, 2, *Good*

OK

all right

finding the critical point(s) , 0.343

OK

OK

OK

all right

output one-dimension test point(s):

[4, 16, 33, 44]

setting the test point(s) and doing test , 0.343

[[4, 3], [16, 35], [16, 74], [33, 139], [33, 291], [44, 207], [44, 469], [44, 525]]

The test result follows ---

Either always 1 or always -1 means the inequality holds accordingly

the number of test point(s) is, 8

-1

-1

-1

-1

-1

-1

-1

-1

less

The inequality holds, 0.687

>