2019 年上海新星秋季数学奥林匹克试题解析

吴尉迟[1], 罗振华[1], 胡珏伟[2], 冷岗松[2]

(1. 华东师范大学, 200241; 2. 上海大学, 200444)

2019 年上海新星秋季数学奥林匹克于 2019 年 12 月 9 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答.

I. 试 题

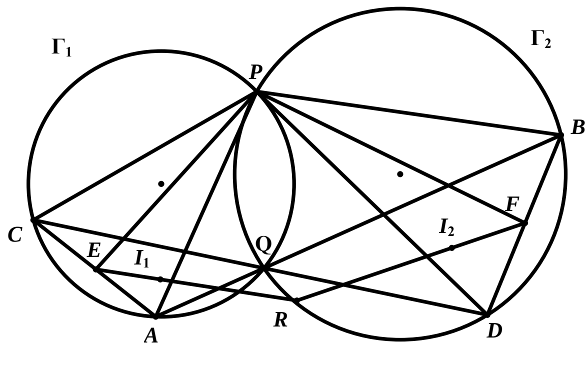
1. 设整数 $n \geq 2$. 求最大的实数 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i+a_j)\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) \geq \lambda \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}$$

对任意满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

(上海中学 王广廷 供题)

2. 如图, 两圆 Γ_1, Γ_2 相交于点 P, Q. 过点 Q 的一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 A, B, 过点 Q 的另一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 C, D. $\angle APC$ 的角平分线交 AC 于点 E, $\angle BPD$ 的角平分线交 BD 于点 F. $\triangle AQC$, $\triangle BQD$ 的内心分别为 I_1, I_2, 直线 EI_1 交 FI_2 于点 R. 证明: PR 平分 $\angle APD$.



(浙江省乐清市知临中学 羊明亮 供题)

修订日期: **2019-12-25.**

3. 设整数 $k \geq 2$. 若正整数 n 能被所有小于 $\sqrt[k]{n}$ 的正整数整除. 证明: n 的不同素因子的个数不超过 $2k-1$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

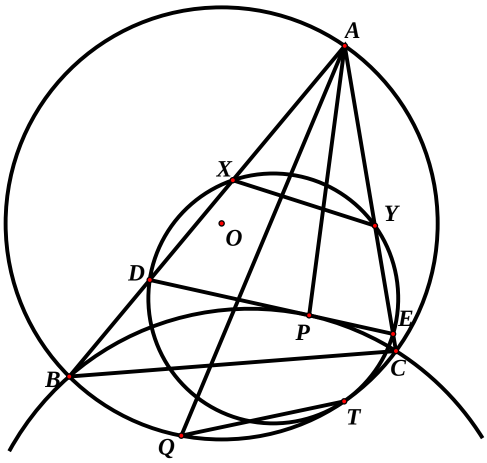
4. 设整数 $n \geq 2$. 求最小的常数$c = c(n)$使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - G_n)^2 \leq c\sum_{k=1}^{n}(a_k - A_n)^2$$

对任意非负实数 $a_1, \cdots, a_n$ 均成立, 其中 $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

5. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上. 过点 B, C 的圆切线段 DE 于点 P, 圆 O 上一点 Q 满足 AQ, AP 互为关于 $\angle BAC$ 的等角线. 过点 D, E 且与圆 O 内切于点 T 的圆, 分别交线段 AD, AE 于点 X, Y. 证明: XY, BC, QT 交于一点.



(吉林大学附属中学 石泽晖 供题)

6. 给定简单图 G 和正整数 n. 证明: 图中存在两个(可以相同)顶点 A, B, 使得以 A 为起点, B 为终点的长度为 n 的路径条数为偶数.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

Ⅱ. 解 答

题 1 设整数 $n \geq 2$. 求最大的实数 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$$

对任意满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

解 $\lambda(n)$ 的最大值为 $2(n-1)$.

一方面, 取 $a_1 = \cdots = a_n = 1$, 有

$$\lambda(n) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) = 2(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

从而 $\lambda(n) \leq 2(n-1)$.

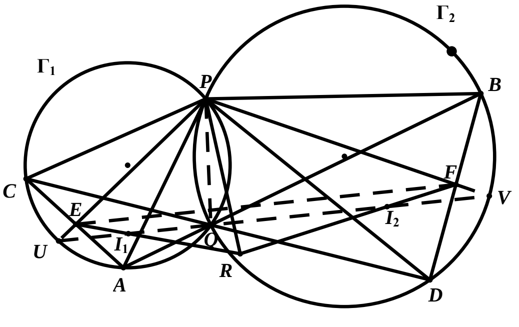
另一方面, 下证 $\lambda(n) = 2(n-1)$ 不等式成立.

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) \geq 2(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) + \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i}\right) \geq 4n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \\
\Leftrightarrow\ & 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{n}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \geq 4n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \geq n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}.
\end{aligned}$$

注意到 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $1 > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{n}$, 由切比雪夫不等式知上式成立. □

评注 这是一道简单的代数题. 约 85 % 的学生做对此题. 注意到变量全相等时取等, 再作适当的代数变形结合切比雪夫不等式即可证得结论.

题 2 如图, 两圆 Γ_1, Γ_2 相交于点 P, Q. 过点 Q 的一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 A, B, 过点 Q 的另一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 C, D. $\angle APC$ 的角平分线交 AC 于点 E, $\angle BPD$ 的角平分线交 BD 于点 F. $\triangle AQC$, $\triangle BQD$ 的内心分别为 I_1, I_2, 直线 EI_1 交 FI_2 于点 R. 证明: PR 平分 $\angle APD$..



证明 设 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ 的中点为 U,V. 由于 PE 平分 $\angle APC$,故 P,E,U 三点共线. 类似可知 P,F,V 三点共线, 又注意到 $\angle AQC$ 与 $\angle BQD$ 是对顶角, 则 U,I_1,Q,I_2,V 四点共线.

由于 $\angle PAB = \angle PCD, \angle PBA = \angle PDC$, 故 $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, 那么 $\triangle PCA \sim \triangle PDB$, 则有

$$\frac{EA}{EC}=\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}=\frac{FB}{FD},\frac{PE}{PU}=\frac{PF}{PV},$$

从而$\triangle PEF \sim \triangle PAB \sim \triangle PCD, EF \parallel UV$.

对 $\triangle PEF$ 及点 R, 由第一角元 Ceva 定理, 知

$$\frac{\sin\angle EPR}{\sin\angle RPF}\cdot\frac{\sin\angle PFR}{\sin\angle RFE}\cdot\frac{\sin\angle FER}{\sin\angle REP}=1. \qquad (*)$$

由 $EF \parallel UV$ 知 $\angle REF = \angle EI_1U$, 所以

$$\frac{\sin\angle FER}{\sin\angle REP}=\frac{\sin\angle EI_1U}{\sin\angle I_1EU}=\frac{EU}{I_1U}=\frac{EU}{AU}=\frac{EC}{PC}=\frac{AC}{PC+PA}.$$

同理,

$$\frac{\sin\angle PFR}{\sin\angle RFE}=\frac{PD+PB}{BD}.$$

结合 $\triangle PCA \sim \triangle PDB$ 知 $\frac{AC}{BD}=\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PD}=\frac{PA+PC}{PB+PD}$, 从而

$$\frac{\sin\angle FER}{\sin\angle REP}\cdot\frac{\sin\angle PFR}{\sin\angle RFE}=1,$$

代入 $(*)$, 故 $\sin\angle EPR = \sin\angle FPR$. 故 $\angle EPR = \angle FPR$. □

评注 这是一道中等难度的几何题, 约 62 % 的学生做对此题. 利用鸡爪定理的几何结构, 与内心和外接圆有关的问题的延长角平分线与圆相交是自然的, 从而首先找 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ 的中点 U,V. 之后立即可以发现若干组相似三角形, 最后用角元 Ceva 定理计算这两个角的正弦比值就可以证得结论.

题 3 设整数 $k \geq 2$. 若正整数 n 能被所有小于 $\sqrt[k]{n}$ 的正整数整除. 证明: n 的不同素因子的个数不超过 $2k-1$.

证明 设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$, 其中 $p_1,p_2,\cdots,p_l$ 是不同的素数, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 是正整数.

若 $l=1$, 则 $l \leq 2k-1$, 命题成立.

若 $l \geq 2$. 对 $1 \leq i \leq l$, 因为 $p_i^{\alpha_i+1}$ 不能整除 n, 所以由题意, $p_i^{\alpha_i+1} \geq \sqrt[k]{n}$. 由 α_i 是正整数, 知 $2\alpha_i \geq \alpha_i + 1$, 所以

$$p_i^{2\alpha_i} \geq \sqrt[k]{n},$$

对 i 从 1 到 l 求积, 得到

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_l^{2\alpha_l} \geq \left(\sqrt[k]{n}\right)^l = n^{\frac{l}{k}}.$$

并注意到 $p_i^{2\alpha_i}(i=1,\cdots,l)$ 不能同时等于 $\sqrt[k]{n}$, 故

$$n^2 > n^{\frac{l}{k}},$$

从而 $2 > \frac{l}{k}$, 即 $l < 2k$, 故 $l \leq 2k-1$, 命题得证. □

评注 此题是有一定难度的数论题, 约 30 % 的学生做对此题. 此题的关键将 n 质因数分解, 探究每个素因子的幂次与 $\sqrt[k]{n}$ 的大小关系, 再对指数放缩得到结论.

本题当 $k=2$ 时是经典的问题, 我们可以求出所有满足要求的 n. 对于一般的 k, 本题给出了 n 的素因子个数的上界, 其处理手段与具体的 k 时是不同的.

题 4 设整数 $n \geq 2$. 求最小的常数$c=c(n)$使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - G_n)^2 \leq c\sum_{k=1}^{n}(a_k - A_n)^2$$

对任意非负实数 $a_1, \cdots, a_n$ 均成立, 其中 $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

解 一方面, 令 $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1$, $a_n = 0$. 则 $A_n = \frac{n-1}{n}$, $G_n = 0$.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - G_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n-1,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - A_n)^2 = (n-1)\frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

可得 $n-1 \leq c\frac{n-1}{n}$. 即 $c \geq n$.

另一方面, 当 $c=n$ 时, 我们证明不等式成立. 即证

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - G_n)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}(a_k - A_n)^2. \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}(*)\text{ 右} &= n\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 - 2a_kA_n + A_n^2\right) = n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - 2A_n\sum_{k=1}^{n}a_k + nA_n^2\right)\\ &= n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - nA_n^2\right) = n\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i - a_j\right)^2.\end{aligned}$$

记 $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - t)^2$. f 是关于 t 的二次函数, 开口向上.

不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 由 $a_1 \leq G_n \leq a_n$, 则 $f(G_n) \leq \max\{f(a_1), f(a_n)\}$.

而

$$f(a_1)=\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_1)^2,\ f(a_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_n)^2.$$

有

$$f(a_1)\le\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2,\ f(a_n)\le\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2.$$

则

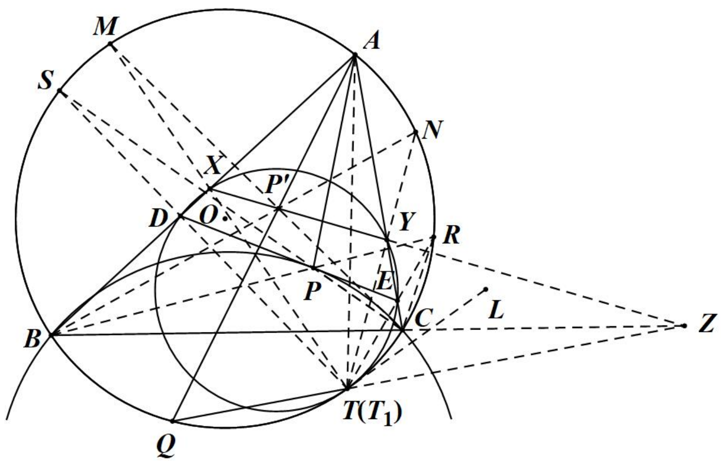
$$\max\{f(a_1),\ f(a_n)\}\le\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2.$$

综上可知, $(*)$ 成立. □

评注 这是一道有一定难度的代数题, 约 27 % 的学生做对此题. 此题来源于 Figalli 不等式, 探讨了 n 个非负实数减去几何平均的平方和的上界估计. 取等条件是常见的两点分布, 上述解法把 G_n 看作变量 t, 利用二次函数的性质得到了结论.

题 5. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上. 过点 B, C 的圆切线段 DE 于点 P, 圆 O 上一点 Q 满足 AQ, AP 互为关于 $\angle BAC$ 的等角线. 过点 D, E 且与圆 O 内切于点 T 的圆, 分别交线段 AD, AE 于点 X, Y. 证明: XY, BC, QT 交于一点.

证明 1 我们分三步完成题目证明.



(1) 先证明: C,E,P,T 四点共圆.

设过 CEP 的圆与 $\odot O$ 交于点 T_1 (异于点 C), 则

$$\angle BT_1P=\angle BT_1C-\angle PT_1C=180^\circ-\angle BAC-\angle AEP=\angle ADP,$$

故 T_1, B, D, P 四点共圆.

由 $\angle CT_1E = \angle CPE = \angle CBP$ 可知, 直线 T_1E 与直线 BP 的交点 R 在 $\odot O$ 上. 同理, 直线 T_1D 与直线 CP 的交点 S 也在 $\odot O$ 上. 过 T_1 作 $\odot O$ 的切线 T_1L, 则

$$\begin{aligned}\angle LT_1E = \angle LT_1R &= \angle LT_1C + \angle CT_1R \\ &= \angle T_1SC + \angle CPE \\ &= \angle T_1SC + \angle SPD = \angle T_1DE,\end{aligned}$$

由此可得: T_1L 亦为 $\triangle T_1DE$ 外接圆的切线. 从而有 $T_1 = T$. 故 C, E, P, T 四点共圆.

同理可知, B, D, P, T 四点共圆.

(2) 分别延长 TX, TY 交 $\odot O$ 于 M, N, 下证: MC, NB, XY, AQ 共点.

设 MC, NB 交于点 P', 对圆内接六边形 $BACMTN$ 应用帕斯卡定理可知: X, P', Y 三点共线. 另一方面

$$\angle TRC = \angle TAC, \angle TYE = \angle TDE = \angle TBP = \angle TBR,$$

从而有

$$\angle TYA = 180^\circ - \angle TYE = 180^\circ - \angle TBR = \angle TCR,$$

因此 $\angle ATY = \angle CTR$, 故 $AN = CR$. 同理, $AM = BS$. 由此可知:

$$\angle BCP = \angle ACP', \angle ABP' = \angle CBP.$$

这说明: P, P' 互为关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点, 从而点 P' 在直线 AQ 上. 也即: MC, NB, XY, AQ 共点于 P'.

(3) 最后证明 XY, BC, QT 交于一点.

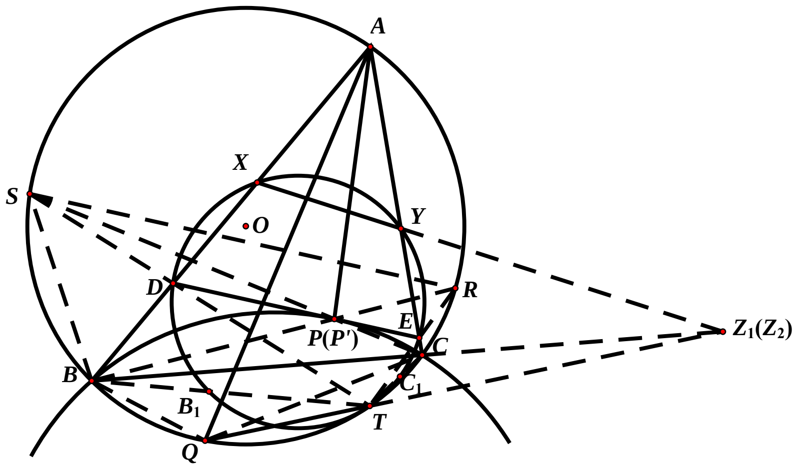
设 BC, QT 交于点 Z. 对圆内接六边形 $TQABCM$, 应用帕斯卡定理可知: X, P', Z 三点共线. 又 P' 在直线 XY 上, 所以 Z 在直线 XY 上, 从而 XY, BC, QT 交于点 Z. $\square$

证明 2 延长 TD, TE 与 $\odot O$ 交于另一点 S, R. 设 $BR \cap CS = P'$.

则对圆内接六边形 $ABRTSC$, 由帕斯卡定理知 D, P', E 共线,注意到 T 为 $\odot O$ 与 $\odot\ (TDE)$ 的外位似中心,所以 $SR \parallel DE$. 于是,

$$\angle CP'E = \angle DP'S = \angle CSR = \angle CBP.$$

故 $\odot\ (BCP')$ 与 DE 相切与 P'. 而 $\odot\ (BCP)$ 与 DE 相切与 P, 所以 $P \equiv P'$. 于



是, $B,P,R;C,P,S$ 三点共线.

设 $XY\cap BC=Z_1, QT\cap BC=Z_2$.

对 $\triangle ABC$ 与截线 XYZ_1, 由梅氏定理,有

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ_1}{Z_1C}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

又

$$\frac{BZ_2}{Z_2C}=\frac{S_{\triangle BQT}}{S_{\triangle CQT}}=\frac{BQ\cdot BT}{CQ\cdot CT}.$$

所以要证 XY,BC,QT 共点, 只需证: $\frac{BZ_1}{Z_1C}=\frac{BZ_2}{Z_2C}$, 即

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{BT}{CT}=1. \tag{$*$}$$

设 BT,CT 与 $\odot(DET)$ 另一交点分别为 B_1,C_1.

因为 $B,B_1;C,C_1;T,T$ 为 $\odot O$ 与 $\odot(DET)$ 的三组外位似对应点, 所以

$$\frac{BB_1}{BT}=\frac{CC_1}{CT}.$$

又 $BB_1\cdot BT=BD\cdot BX, CC_1\cdot CT=CE\cdot CY$. 所以

$$\frac{BD\cdot BX}{BT^2}=\frac{CE\cdot CY}{CT^2},$$

即

$$\frac{BT\cdot CY}{CT\cdot BX}=\frac{CT\cdot BD}{BT\cdot CE}.$$

又

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{BQ}{CQ}=\frac{AE}{AD}\cdot\frac{\sin\angle EAP}{\sin\angle DAP}=\frac{EP}{DP}.$$

于是, $(*)\Leftrightarrow\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BD}{DP}\cdot\frac{PE}{EC}=1.$

事实上,

$$\begin{aligned}\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BD}{DP}\cdot\frac{PE}{EC}&=\frac{\sin\angle CBT}{\sin\angle BCT}\cdot\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle PBD}\cdot\frac{\sin\angle PCE}{\sin\angle CPE}\\&=\frac{\sin\angle PSD}{\sin\angle BSD}\cdot\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle PBD}\cdot\frac{\sin\angle DBS}{\sin\angle DPS}\\&=\frac{\sin\angle DSP}{\sin\angle DPS}\cdot\frac{\sin\angle DPB}{\sin\angle DBP}\cdot\frac{\sin\angle DBS}{\sin\angle DSB}\\&=1\end{aligned}$$

证毕. □

证明 3 同证明 1, 作出 R,S. 可知 $B,D,P,T;C,E,P,T$ 四点共圆. 于是, $\angle XBT=\angle EPT$. 又 $\angle BXT=\angle PET$. 故 $\triangle BTX\sim\triangle PTE$. 同理, $\triangle CTY\sim\triangle PTD$. 故

$$\frac{BT}{BX}=\frac{PT}{PE},\frac{CT}{CY}=\frac{PT}{PD}.$$

同证明 2, 只需证:

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{CY}{BX}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{BT}{CT}=1.$$

事实上,

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{BQ}{CQ}=\frac{AE}{AD}\cdot\frac{\sin\angle EAP}{\sin\angle DAP}=\frac{EP}{DP},\frac{BT}{BX}\cdot\frac{CY}{CT}=\frac{PD}{PE},$$

故结论成立. □

评注 这是一道困难的几何题, 约 6 % 的学生做对此题. 此题是伪内切圆性质的推广, 如果熟悉相关几何性质和证法对解决问题是有一定帮助的. C,E,P,T 和 B,D,P,T 均四点共圆是基本的几何事实, 法一主要通过帕斯卡定理证得结论, 法二和法三通过计算比例证得结论.

题 6. 给定简单图 G 和正整数 n. 证明: 图中存在两个(可以相同)顶点 A,B, 使得以 A 为起点, B 为终点的长度为 n 的路径条数为偶数.

证明 1 设 G 的顶点集为 V, 边集为 E. 对 $v\in V$, 用 $d(v)$ 表示点 v 的度数.

对 $u,v\in V$ 及 $m\in\mathbb{N}^+$, 用 $F_m(u,v)$ 表示以 u 为起点, v 为终点的长为 m 的路径数目. 显然 $F_m(u,v)=F_m(v,u)$.

反证法, 假设结论不成立, 则对任意的 $u,\ v\in V$,

$$F_n(u,\ v)\equiv 1 \pmod 2. \qquad (*)$$

成立. 对任意 $u,\ v\in V$.

考虑 $F_{n+1}(u,\ v)$. 有

$$F_{n+1}(u,\ v)=\sum_{\substack{\omega\in V\\ u\omega\in E}}F_n(\omega,\ v)\equiv\sum_{\substack{\omega\in V\\ u\omega\in E}}1\equiv d(u)\pmod 2.$$

同理

$$F_{n+1}(u,\ v)\equiv d(v)\pmod 2.$$

故

$$d(u)\equiv d(v)\pmod 2.$$

则 G 中各顶点度的奇偶性相同.

设 $|v|=t,\ t\in\mathbb{N}^+$.

(1) t 是奇数, 由于 $\sum\limits_{u\in V}d(u)\equiv 0\pmod 2$, 从而 G 中各顶点度为偶数. 我们归纳证明

$$\sum_{\omega\in V}F_i(u,\ \omega)\equiv 0\pmod 2$$

对任意 $u\in V, i\in\mathbb{N}^+$ 成立.

$i=1$ 时,

$$\sum_{\omega\in V}F_i(u,\ \omega)=d(u)\equiv 0\pmod 2,$$

结论成立.

假设 i 时成立, $i+1$ 时, 由归纳假设知,

$$\sum_{\omega\in V}F_{i+1}(u,\ \omega)=\sum_{\substack{v\in V\\ uv\in E}}F_i(v,\ \omega)=\sum_{\substack{v\in V\\ uv\in E}}0\equiv 0\pmod 2.$$

结论得证. 特别地,

$$\sum_{\omega\in V}F_n(u,\ \omega)\equiv 0\pmod 2.$$

但由假设

$$\sum_{\omega\in V}F_n(u,\ \omega)\equiv\sum_{\omega\in V}1\equiv t\equiv 1\pmod 2,$$

矛盾!

(2) t 是偶数.

(i) G 中顶点度全为奇数.

与 (1) 类似归纳易证: 对任意 $u\in V, i\in\mathbb{N}^+$, 有

$$\sum_{\omega\in V}F_i(u,\ \omega)\equiv 1\pmod 2$$

特别地,

$$\sum_{\omega\in V} F_n(u,\ \omega)\equiv 1 \pmod 2$$

这与

$$\sum_{\omega\in V} F_n(u,\ \omega)\equiv \sum_{\omega\in V} 1\equiv t\equiv 0 \pmod 2$$

矛盾.

(ii) G 中顶点度全为偶数. 归纳证明: $F_i(u,\ u)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 对任意 $u\in V,\ i\in\mathbb{N}^+$ 成立.

$i=1$ 时, $F_1(u,\ u)=0$, 成立.

$i=2$ 时, $F_2(u,\ u)=\sum\limits_{\substack{\omega\in V\\ u\omega\in E}} 1=d(u)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

假设 i 时结论成立, $i+2$ 时, 设 u 与 $u_1,\ \cdots,\ u_s$ 相邻, 其中s 为非负偶数.

$s=0$ 时, $F_{i+2}(u,\ u)=0\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

$s>0$ 时,

$$\begin{aligned}
F_{i+2}(u,\ u)&=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} F_i(u_k,\ u_j)\\
&=\sum_{k=1}^{s} F_i(u_k,\ u_k)+2\sum_{1\le k<j\le s} F_i(u_k,\ u_j)\\
&\equiv \sum_{k=1}^{s} F_i(u_k,\ u_k)\\
&\equiv \sum_{k=1}^{s} 0\ (\text{归纳假设})\\
&\equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

结论成立. 特别地, $F_n(u,\ u)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 与假设矛盾.

综上所述, 假设不成立, 故原命题得证. □

证明 2 (根据华中师范大学第一附属中学廖悦辛同学解答整理) 记图 G 的顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$, 考虑图 G 的邻接矩阵 $A\in M_m(\mathbb{Z})$: 若 v_i 与 v_j 相邻, 则 A 的 (i,j) 元和 (j,i) 元为 1, 否则为 0, 特别地, A 的对角线上均为 0(因为 G 不含环边). 易知 A 是对称矩阵. 设 A^k 中的 (i,j) 元为 $a_{ij}(k)$. 关于邻接矩阵, 有如下重要性质.

引理 1 对正整数 k, A^k 中的 (i,j) 元 $a_{ij}(k)$ 就是 G 中 v_i 到 v_j 的长度为 k 的路径个数.

引理 1 的证明　对 k 归纳证明. $k=1$ 时结论显然成立. 假设 k 时结论成立,

考虑 $k+1$ 时. 对从 v_i 到 v_j 的长度为 $k+1$ 的路径按其 k 步之后所在顶点 v_l 分类计算, 可知从 v_i 到 v_j 的长度为 $k+1$ 的路径个数为

$$\sum_{l=1}^{m} a_{il}(k)a_{lj}(1),$$

而这正是矩阵乘法 $A^k \cdot A$ 的 (i,j) 元, 即 $a_{ij}(k+1)$.

引理 2 设 $X \in M_m(K)$, K 是任意一个域, 若 X 是对称矩阵, 则对任意正整数 k, X^k 也是对称矩阵; 若 X 是斜对称矩阵, 则对任意奇数 $k>0$, X^k 也是斜对称矩阵.

引理 2 的证明 若 X 是对称矩阵, $X^T = X$, 则对任意正整数 k, 由转置的性质可知 $(X^k)^T = (X^T)^k = X^k$, 因此 X^k 也是对称矩阵. 若 X 是斜对称矩阵, $X^T = -X$, 则对奇数 $k>0$, 由转置性质可知

$$(X^k)^T = (X^T)^k = (-X)^k = (-1)^k X^k = -X^k,$$

因此 X^k 也是斜对称矩阵.

下面回到原问题, 我们需要证明 A^n 中有一个元素 $a_{ij}(n)$ 是偶数.

首先考虑 n 是奇数的情形. 将 A 的对角线下方的 1 全部改为 -1, 所得矩阵记为 B, 则 B 是斜对称矩阵, 且 $A \equiv B \pmod 2$. 将 A, B 均看作实数域上矩阵, 由引理 2, B^n 也是斜对称的, 而实数域上斜对称矩阵对角线元素均为 0, 再由 $A^n \equiv B^n \pmod 2$ 可知, A^n 的对角线元素均为偶数.

下面考虑 n 是偶数的情形, 现将 A 看作模 2 域 $\mathbb{F}_2$ 上的矩阵, $A \in M_m(\mathbb{F}_2)$, A 是对角线上元素均为 0 的对称阵. 设 $n = 2^a \cdot k$, k 是奇数, 记 $C = A^k$, 上面已经证明了 C 也是对角线上元素均为 0 的对称阵.

反证法, 假设 C^{2^a} 的所有元素均为 1, 记为矩阵 J, 则由于 $C^{2^a+1} = JC$ 的对角线元素为 0, 可知 C 的每一列均有偶数个 1, 再由 C 是对称阵, C^2 的 (i,i) 元为 C 的 i 行与 i 列的对应数乘积之和, 等于0, 故 C^2 是对角元素均为0的对称阵. 设 $D = C^2$, 则 $D^{2^{a-1}} = J$, 重复上面的过程又可证明 D^2 是对角元素均为 0 的对称阵, 继续这一过程, 对 $t = 1, 2, \cdots, a$, 依次可证明 C^{2^t} 对角元素均为 0 的对称阵, 这与 $C^{2^a} = J$ 矛盾.

因此反证法假设不成立, A^n 中总有元素是偶数. □

评注 这是一道非常困难的组合题, 分类情形较多, 有相当的复杂度 考场中并无学生做出此题. 解法一利用反证假设得到每点的度数均相同, 再对顶点数和度数分类讨论, 利用归纳法得到结论. 解法二运用图的邻接矩阵 A 与路径个数

之间的联系, 采用矩阵的方法来证明 A^n 中必有一个元素是偶数. 在 n 是奇数时, 可将 A 在模 2 下看作一个斜对称矩阵. 在 n 是偶数时, 结合反证法, 先转化为 n 是 2 的方幂的情形, 再归纳地证明 C^{2^t} 上对角元素均为 0.

致谢 感谢瞿振华老师对第六题的解法二做了精心的修改.