第 35 届 CMO 第六题的另解

李逸凡　黄凤麟　丁天巽

(上海市上海中学, 200231)

指导教师: 王广廷

第 35 届 CMO第六题如下:

是否存在正实数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{19}$ 同时满足以下两个条件？请证明你的结论.

(I) 多项式 $P(x)=x^{20}+a_{19}x^{19}+\cdots+a_1x+a_0$ 无实根.

(II) 对任意整数 $0\le i<j\le 19$, 交换 $P(x)$ 的 x^i 和 x^j 的系数所得的多项式均有实根.

下面将给出本题的两个解答.

解法 1 取实数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{19}$ 使得

$$0<a_{19}<a_{17}<\cdots<a_1<a_0<a_2<\cdots<a_{18}. \tag{1}$$

令

$$F(x)=a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$Q(x)=a_0x^{20}+a_1x^{19}+\cdots+a_{19}x=F\left(\frac{1}{x}\right)x^{20}.$$

由于 $F(x)$ 是 19 次多项式, 故存在实数 k, 使得当 $x<k$ 时,

$$F(x)=a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\cdots+a_1x+a_0<0. \tag{2}$$

由 (1) 知, 对任意 $x\ge -1$, 有

$$F(x)=\sum_{k=0}^{9}(a_{2k}x^{2k}+a_{2k+1}x^{2k+1})\ge 0. \tag{3}$$

由 (2), (3) 知 $Q(x)<0$ 的解集一定包含在闭区间 $[-1,\ 0]$ 内, 注意到 $Q(x)$ 是多项式函数及 $[-1,\ 0]$ 是闭区间, 则 $Q(x)$ 在 $[-1,\ 0]$ 上有最小值 λ. 设 $Q(t)=\lambda$,

修订日期: 2020-01-01.

结合 (2) 知 $\lambda<0$. 由 $Q(0)=0>\lambda$ 及 $Q(-1)>0>\lambda$, 知 $t\in(-1,\ 0)$.

记 $\xi=\frac{1}{t}$, 则 $\xi<-1$ 且 $F(\xi)=\frac{\lambda}{t^{20}}$.

取 $P_0(x)=x^{20}-\frac{1}{\lambda}F(x)$. 由 λ 的定义知 $\lambda\le Q(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\alpha^{20}}$, 所以

$$\alpha^{20}-\frac{1}{\lambda}F(\alpha)\ge 0,$$

即 $P_0(\alpha)\ge 0$ 恒成立.

对任意 $0\le i<j\le 19$, 交换 $P_0(x)$ 的 x^i 和 x^j 项的系数, 得到 $H_{ij}(x)$, 其中 $H_{ij}(\xi)=(a_j-a_i)(\xi^i-\xi^j)$.

下面对 $i,\ j$ 的奇偶性, 分四种情况进行讨论:

(1)若 i 是奇数, j 是偶数, 则 $a_j-a_i>0$, $\xi^i-\xi^j<0$, 于是 $H_{ij}(\xi)<0$;

(2)若 i 是偶数, j 是奇数, 则 $a_j-a_i<0$, $\xi^i-\xi^j>0$, 于是 $H_{ij}(\xi)<0$;

(3)若 i 是奇数, j 是奇数, 则 $a_j-a_i<0$, $\xi^i-\xi^j>0$, 于是 $H_{ij}(\xi)<0$;

(4)若 i 是偶数, j 是偶数, 则 $a_j-a_i>0$, $\xi^i-\xi^j<0$, 于是 $H_{ij}(\xi)<0$.

故对任意 $0\le i<j\le 19$, 有 $H_{ij}(\xi)<0$.

取 $\epsilon>0$, 使得对任意 $0\le i<j\le 19$, 有

$$\lambda\epsilon(H_{ij}(\xi)-\xi^{20})+H_{ij}(\xi)<0$$

且 $\frac{1}{\lambda}+\epsilon<0$.

由 $H_{ij}(\xi)<0$ 及 $\frac{1}{\lambda}<0$ 知 ϵ 存在.

令 $P(x)=x^{20}-(\frac{1}{\lambda}+\epsilon)F(x)$. 由 λ 的定义知, $\frac{F(\alpha)}{\alpha^{20}}=Q\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ge\lambda>\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\epsilon}$ (因为 $\frac{1}{\lambda}+\epsilon<0$ 且 $\frac{1}{\lambda}<0,\ \epsilon>0$), 所以 $\alpha^{20}-\left(\frac{1}{\lambda}+\epsilon\right)F(\alpha)>0$ 恒成立.

假设交换 $P(x)$ 中 $x^i,\ x^j$ 的系数得到 $R_{ij}(x)$, 则

$$R_{ij}(\xi)=\frac{\frac{1}{\lambda}+\epsilon}{\frac{1}{\lambda}}\left(H_{ij}(\xi)-\xi^{20}\right)+\xi^{20}=-\lambda\epsilon\xi^{20}+H_{ij}(\xi)+\lambda\epsilon H_{ij}(\xi)<0.$$

因为 $R_{ij}(x)$ 是 20 次多项式, 则 $R_{ij}(x)$ 有实根.

最后说明 $P(x)$ 的每项系数均是正数, 这是因为 $F(x)$ 的每项系数均为正数且 $-\left(\frac{1}{\lambda}+\epsilon\right)$ 为正数.

综上可知, $P(x)$ 满足条件. $\square$

评注 这是一道颇为困难的问题, 上手难度并不是很大, 可以通过尝试交换 $i,\ j$ 项系数后与原多项式进行比较便可以得到各项系数的大小关系. 下一步操作是解题关键, 需要用一种动态的想法去思考问题, 将原多项式拆分成两个多项式 x^{20} 和 $a_{19}x^{19}+\cdots+a_0$, 然后将 $P(x)$ 恒正转化为通过改变 λx^{20} 中的 λ 来使这两个多项式的图像从相离逐渐运动到相切. 在相切的那个时刻得到的多项式

$P'(x)$ 已满足交换 $i,\ j$ 项系数有限的要求, 且 $P'(x)$ 恒不小于0. 最后只需对系数进行微调使 $P(x)$ 无解即可.

解法 2 取正数 $N>600$. 记

$$f(x)=x^{20}+\sum_{i=0}^{9}(N+i)x^{2i},\ g(x)=\sum_{i=0}^{9}(\sqrt{N}+9-i)x^{2i+1}.$$

显然, 当 $x\to 0^+$ 或 $x\to+\infty$ 时 $\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty$, 故存在实数 $0<a<b$, 使得当 $0<x<a$ 时, 有 $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(\sqrt{N})}{g(\sqrt{N})}$, 当 $x>b$ 时, 有 $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(\sqrt{N})}{g(\sqrt{N})}$.

注意到 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的连续函数, 故存在最小值 t. 不妨设 $\frac{f(u)}{g(u)}=t$, 则对 $x\in(0,\ +\infty)$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq t$. 由 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 恒正, 知 $t>0$. 则

$$t\leq\frac{f(\sqrt{N})}{g(\sqrt{N})}\leq\frac{(N+9)N^9+N^{10}+(N+8)N^8\cdot 9}{N^{10}}\leq 2+\frac{100}{N}<3.$$

若 $u\leq 1$, 则

$$\frac{f(u)}{g(u)}\geq\frac{N}{(\sqrt{N}+9)\cdot 10}>\frac{N}{2\sqrt{N}\cdot 10}=\frac{\sqrt{N}}{20}>3>t.$$

矛盾. 故 $u>1$.

下证: $h(x)=f(x)+tg(x)+\epsilon$ 符合要求 (其中 $0<\epsilon<\min\{1,\ u^2-1,\ u-1,\ (u-1)t\}$).

记

$$h(x)=x^{20}+a_{19}x^{19}+\cdots+a_1x+a_0.$$

显然每个 $a_i(0\leq i\leq 19)$ 均大于 0.

先说明 $h(x)$ 无实根. 只需证明对任意实数 x, $h(x)>0$ 即可.

当 $x\geq 0$ 时, 显然成立.

当 $x<0$ 时, 由 t 的定义知 $\frac{f(-x)}{g(-x)}\geq t$, 所以 $f(-x)\geq g(-x)t$. 又 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$, 则

$$h(x)=f(x)+tg(x)+\epsilon=f(-x)-tg(-x)+\epsilon\geq\epsilon>0.$$

再说明交换 a_i 与 a_j 之后得到的 $\overline{h}(x)$ 均有实根. 由于 $\overline{h}(x)$ 首项为 1, 故只需证 $\overline{h}(-u)<0$.

$$\begin{aligned}h(-u)-\overline{h}(-u)=&a_i(-u)^i+a_j(-u)^j-a_i(-u)^j-a_j(-u)^i\\=&(a_i-a_j)\left[(-u)^i-(-u)^j\right].\end{aligned}$$

故

$$\overline{h}(-u)=\epsilon-(a_i-a_j)\left[(-u)^i-(-u)^j\right].$$

下面讨论 i, j 的奇偶性来确定 $\overline{h}(-u)$ 的符号.

(1)若 i, j 一奇一偶.

不妨设 i 为奇数, j 为偶数, 则

$$\begin{aligned}\overline{h}(-u) =&\epsilon-(a_j-a_i)\left[u^i+u^j\right]\\ \leq&\epsilon-2\left(N-t(\sqrt{N}+9)\right)\\ <&\epsilon-2\left(N-3(\sqrt{N}+\sqrt{N})\right)\\ =&\epsilon-2(\sqrt{N}-6)\sqrt{N}\\ <&\epsilon-2\sqrt{N}<0.\end{aligned}$$

(2)若 i, j 同奇偶, 且 $i-j\neq 0$, $i\cdot j\neq 0$.

不妨设 $i>j$, 则

$$a_i-a_j=\begin{cases}i-j,\ (i,\ j\text{ 为偶数})\\ t(j-i),\ (i,\ j\text{ 为奇数})\end{cases},\quad (-u)^i-(-u)^j=\begin{cases}u^i-u^j,\ (i,\ j\text{ 为偶数})\\ -u^i+u^j,\ (i,\ j\text{ 为奇数})\end{cases}.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{h}(-u) =&\epsilon-(i-j)(u^i-u^j)\left(\text{或 }\epsilon-t(i-j)(u^i-u^j)\right)\\ \leq&\epsilon-(u-1)\left(\text{或 }\epsilon-t(u-1)\right)<0.\end{aligned}$$

(3)若 i, j 同为偶数且 $i\cdot j=0$.

不妨设 $j=0$, 则

$$a_i-a_j=i-j-\epsilon=i-\epsilon,\quad (-u)^i-(-u)^j=u^i-1.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{h}(-u) =&\epsilon-(u^i-1)(i-\epsilon)\\ \leq&\epsilon-(u^2-1)<0.\end{aligned}$$

综上可知, $\overline{h}(-u)<0$. 即原问题得证. □

评注 首先设 $f(x)$ 的形式为 $(x-u)^2g(x)+\epsilon$ 其中 $g(x)$ 恒正. 若取 ϵ 充分小, 通过简单分析可以得到一个关于 $f(x)$ 系数的性质及 u 与 1 的关系的一个充分条件. 若 $u>1$, 则 $f(x)$ 的非首项的偶次项系数永远比奇次项系数大. 因此很容易想到将奇偶分离进行分析. 在构造的过程中, 发现同奇偶次项系数之间的大小关系难以满足. 因此在构造时, 给出偶次项系数的大小及奇次项系数的比例关系. 再通过 $f(x)$ 恒正这一条件确定偶次项系数与奇次项奇数之间的比, 便得到了这个证明方法.