2019 年土耳其数学奥林匹克（决赛）试题解答与评析

侯傑夫　王琇　尹顺

(湖南师范大学附属中学, 410006)

指导教师: 汤礼达

2019 年土耳其数学奥林匹克 (决赛) 的六道试题最近出炉, 这是一套高质量的试题, 问题新颖且优雅. 其中, 题 1,2,4 是简单题, 题 3,5,6 是中等难度, 前 5 题是不错的联赛训练题. 本文给出这六道题的解答及一些评注, 不当之处敬请指正.

I. 试 题

1. 设正实数 $a,\ b,\ c$ 满足

$$\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{bc}-1\right)\left(\sqrt{ca}-1\right)=1,$$

则六个数

$$a-\frac{b}{c},\ a-\frac{c}{b},\ b-\frac{c}{a},\ b-\frac{a}{c},\ c-\frac{a}{b},\ c-\frac{b}{a}$$

中至多有几个数大于 1?

2. 对正整数 m, 用 $d(m)$ 表示 m 的正约数个数. 给定奇数 k, 证明: 存在一个严格递增的正整数等差数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2019}$, 使得 k 与 $d(a_1)\,d(a_2)\cdots d(a_{2019})$ 互素.

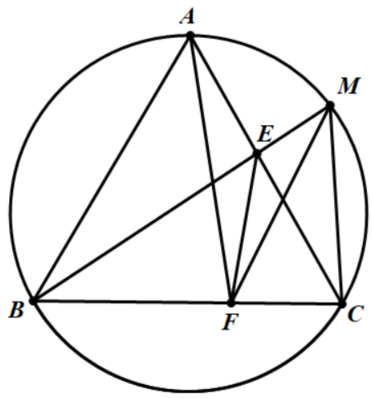
3. 校园里有 2019 名学生, 每名学生加入了一个或多个社团, 每个社团恰有 12 名社团干部. 一群学生能够开展某个社团的活动, 当且仅当这些学生都来自该社团, 且这个社团的干部都在这些学生中.

现已知对任意一群至少 12 人的学生, 他们恰能开展唯一一个社团的活动,

修订日期: 2020-01-10.

这是否可能? 如果可能, 求恰有 27 人加入的社团的所有可能数目.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$. M 为劣弧 AC 上一点, BM 与 AC 相交于点 E, $\angle BMC$ 的平分线与 BC 相交于点 F. 若 $\angle AFB = \angle CFE$, 证明: $\triangle ABC$ 是等边三角形.



5. 设函数 $f:\{1,\ 2\cdots 2019\}\to\{-1,\ 1\}$ 满足对任意 $1\le k\le 2019$, 都存在 $1\le l\le 2019$ 使得

$$\sum_{i:(i-k)(l-i)\ge 0} f(i)\le 0.$$

求 $\sum\limits_{i=1}^{2019} f(i)$ 的最大值.

6. 对于整数 $n\ge 3$, 整数 a 称为 $n-$好的, 若存在正整数 d, 使得

$$n \mid a^d-1,\ n\nmid a^{d-1}+a^{d-2}+\cdots+1.$$

设 $f(n)$ 是集合 $\{a \mid 0<a<n, (a,\ n)=1,\ \text{但}\ a\ \text{不是}\ n-\text{好的}\}$ 的元素个数. 求 $f(n)\,(n\ge 3)$ 的最小值, 并求出所有 $n\,(\ge 3)$ 使得 $f(n)$ 取到该最小值.

II．解答与评注

1. 设正实数 $a,\ b,\ c$ 满足

$$\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{bc}-1\right)\left(\sqrt{ca}-1\right)=1,$$

则六个数

$$a-\frac{b}{c},\ a-\frac{c}{b},\ b-\frac{c}{a},\ b-\frac{a}{c},\ c-\frac{a}{b},\ c-\frac{b}{a}$$

中至多有几个数大于 1?

解 至多 4 个数大于 1.

一方面, 令 $a=b=\frac{5}{4}$, $c=\frac{36}{5}$ 满足条件, 所说六个数依次为
$$\frac{155}{144},\ -\frac{451}{100},\ -\frac{451}{100},\ \frac{155}{144},\ \frac{31}{5},\ \frac{31}{5},$$
其中有 4 个数大于 1.

另一方面, 假设所说的数中至少五个大于1, 则 $a,\ b,\ c>1$, 注意到
$$\sqrt{ab}-1\geq\sqrt{(a-1)(b-1)},$$
$$\sqrt{bc}-1\geq\sqrt{(b-1)(c-1)},$$
$$\sqrt{ca}-1\geq\sqrt{(c-1)(a-1)}.$$
相乘得
$$\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{bc}-1\right)\left(\sqrt{ca}-1\right)\geq(a-1)(b-1)(c-1)\,. \tag{1}$$
不妨设 $a-\frac{b}{c}$, $b-\frac{c}{a}$, $c-\frac{a}{b}$ 都大于 1, 则
$$a-1>\frac{b}{c},\ b-1>\frac{c}{a},\ c-1>\frac{a}{b}.$$
相乘得
$$(a-1)(b-1)(c-1)>1, \tag{2}$$
(1) 与 (2) 矛盾! 因此至多 4 个数大于 1. □

评注 令 $a=b$ 代入条件以寻找例子, 对 Aczel 不等式熟悉的话容易导出 (1) 式, 与结论相比对则可得到以上证明. 本题可以用分类讨论来做.

2. 对正整数 m, 用 $d(m)$ 表示 m 的正约数个数. 给定奇数 k, 证明: 存在一个严格递增的正整数等差数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2019}$, 使得 k 与 $d(a_1)\,d(a_2)\cdots d(a_{2019})$ 互素.

证法 1 记 $d=2019!$. 先证明 2019 个数 $1+d,\ 1+2d,\ \cdots,\ 1+2019d$ 两两互素.

假设存在素数 p 以及 $1\leq i<j\leq 2019$ 使得 $p\mid 1+id$, $p\mid 1+jd$, 则 p 与 d 互素, 且 $p\mid(1+jd)-(1+id)=(j-i)\,d$, 故 $p\mid j-i$. 但 $0<j-i\leq 2019$, 故 $(j-i)\mid d$, 导致 $p\mid d$, 矛盾! 因此, $1+id\,(1\leq i\leq 2019)$ 两两互素.

设 k 的全体素因子为 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t$, 对任意素数
$$p\mid(1+d)(1+2d)\cdots(1+2019d)\,,$$
由上述, 存在唯一的 $1\leq i\leq 2019$ 使 $p\mid 1+id$, 设 p 在 $1+id$ 中的幂次为 e_p. 因

为 k 是奇数, 故 $q_s \geq 3$, 从而存在整数 $h_{p,\,s}$, 使得

$$1+h_{p,\,s} \not\equiv 0\,(\bmod q_s)\,,\ 1+h_{p,\,s}+e_p \not\equiv 0\,(\bmod q_s)\,(1\leq s\leq t).$$

因为 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t$ 两两互素, 故由中国剩余定理, 存在正整数 h_p 满足

$$h_p \equiv h_{p,\,s}\,(\bmod q_s)\,(1\leq s\leq t)\,.$$

令

$$A=\prod_{\text{素数}p\mid(1+d)\cdots(1+2019d)} p^{h_p},\ a_i=A\,(1+id)\,(1\leq i\leq 2019)\,,$$

则对任意 $a_i\,(1\leq i\leq 2019)$,

$$d\,(a_i)=\prod_{\text{素数}p\mid a_i}(1+v_p\,(a_i))\ (v_p\,(m)\ \text{表示}\ m\ \text{中素数}\ p\ \text{的幂次}).$$

若 $p\nmid 1+id$, 则 $v_p\,(a_i)=v_p\,(A)=h_p$, 而 $1+h_p$ 与 $q_s\,(1\leq s\leq t)$ 互素.

若 $p\mid 1+id$, 则 $v_p\,(a_i)=v_p\,(A)+e_p=h_p+e_p$, 而 $1+h_p+e_p$ 与 $q_s\,(1\leq s\leq t)$ 互素.

因此 $d\,(a_i)$ 与 k 互素, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2019}$ 满足要求. □

证法 2 我们证明更强的结论:

存在一个严格递增的正整数等差数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2019}$, 使得

$$d\,(a_1)\,d\,(a_2)\cdots d\,(a_{2019})$$

是 2 的幂. 这等价于证明 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2019}$ 无平方因子.

为此, 考虑数列 $\{1+nd\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $d=2019!$.

记 $f(N)$ 为 $1+d,\ 1+2d,\ \cdots,\ 1+Nd$ 中有平方因子的数的个数. 对素数 p, 记 $f_p(N)$ 为 $1+d,\ 1+2d,\ \cdots,\ 1+Nd$ 中 p^2 倍数的个数, 同时考虑到对于 $p^2\mid 1+id,\ i\leq N,$ 有 $p^2\leq 1+Nd,$ 从而 $p\leq\sqrt{1+Nd}.$ 故

$$f(N)\leq\sum_{\text{素数}p:\ p\leq\sqrt{1+Nd}} f_p(N).$$

明显地, 由于 $(1+nd,\ 2019!)=1$, 从而对素数 $p\leq 2019$ 有 $f_p(N)=0.$ 对素数 $p>2019,\ (p,\ d)=1,$ 由于 $1+id\equiv 0\ (\bmod\ p^2)$ 对 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p^2\}$ 恰有一解. 从而有

$$f_p(N)\leq\left[\frac{N-1}{p^2}\right]+1<\frac{N}{p^2}+1.$$

故

$$f(N)\leq\sum_{\text{素数}p:2019<p\leq\sqrt{1+Nd}} f_p(N)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{\text{素数}p:2019<p\le\sqrt{1+Nd}} \left(\frac{N}{p^2}+1\right) \\
&< N\left(\sum_{\text{素数}p:2019<p} \frac{1}{p^2}\right)+\sqrt{1+Nd} \\
&< N\sum_{p>2020} \frac{1}{p(p-1)}+\sqrt{1+Nd}\ (\text{2020 不是素数}) \\
&\le \frac{N}{2020}+\sqrt{1+Nd}.
\end{aligned}
$$

假设对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-2018, 1+id,\ 1+(i+1)d,\ \cdots,\ 1+(i+2018)d$ 中至少一个有平方因子, 那么

$$f(N)\ge\left[\frac{N}{2019}\right]>\frac{N}{2019}-1.$$

于是

$$\frac{N}{2019}-1<\frac{N}{2020}+\sqrt{1+Nd}.$$

在 N 充分大时上式不成立. 于是存在 $i\in\mathbb{N}_+,\ 1+id,\ 1+(i+1)d,\ \cdots 1+(i+2018)d$ 均无平方因子, 从而加强命题得证.

原命题成立. □

评注 本题一开始可能想归纳法, 但过渡时若改变公差则难以应用归纳假设.

法 1 直接构造时意识到等差数列的标准分解难以刻画, 会促使我们对预先给的数列乘上适当倍数, 以调整各项的素因数幂次.

如果了解 Green-Tao 定理, 即存在任意长的素数等差数列, 法 2 加强命题是自然的. 我们需要证明每一项无平方因子, 这可以化归为经典的数论计数问题.

3. 校园里有 2019 名学生, 每名学生加入了一个或多个社团, 每个社团恰有 12 名社团干部. 一群学生能够开展某个社团的活动, 当且仅当这些学生都来自该社团, 且这个社团的干部都在这些学生中.

现已知对任意一群至少 12 人的学生, 他们恰能开展唯一一个社团的活动, 这是否可能? 如果可能, 求恰有 27 人加入的社团的所有可能数目.

解 用集合语言描述问题:

设 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$ 是集合 $S=\{1,\ 2,\ \cdots 2019\}$ 的子集, $B_i\subseteq A_i,\ |B_i|=12\,(1\le i\le n)$. 已知对任意 $C\subseteq S$, 存在唯一的 $i\,(1\le i\le n)$, 使得 $B_i\subseteq C\subseteq A_i$. 问这是否可能, 如果可能, 求满足 $|A_i|=27$ 的 $i\,(1\le i\le n)$

的所有可能数目.

这可能发生, 令 $B_i\left(1\le i\le n,\ n=\binom{2019}{12}\right)$ 为 S 的全体 12 元子集, 设 B_i 中最大元素为 b_i, 令 $A_i=B_i\bigcup\{b_i+1,\ b_i+2,\ \cdots,\ 2019\}$.

此时对任意 $C\subseteq S$, 设 C 的 12 个较小的元素组成集合 C', 则存在 $B_i=C'$, 进而 $A_i\setminus B_i=\{b_i+1,\ b_i+2,\ \cdots,\ 2019\}\supseteq(C\setminus C')$, 故 $B_i=C'\subseteq C\subseteq A_i$. 若有 j 使得 $B_j\subseteq C\subseteq A_j$, 由 $B_j\subseteq C$ 知 B_j 中第12小的元素 b_j 不小于 C 中第 12 小的元素 c, 由 $C\subseteq A_j$ 知 A_j 中第 12 小的元素 b_j 不大于 C 中第 12 小的元素 c, 故只能 $c=b_j$, 导致 $B_j=C'$. j 唯一性得证.

在这个例子中恰有 $\binom{2019-15-1}{11}=\binom{2003}{11}$ 个 i 使得 $|A_i|=27$, 下证这样的数目只能是 $\binom{2003}{11}$.

用 $x_k\,(12\le k\le 2019)$ 表示使得 $|A_i|=k$ 的 i 的数目. 对 $12\le k\le 2019$, S 的每个 k 元子集 C 都存在唯一的 i 使 $B_i\subseteq C\subseteq A_i$; 而对每个 i, 设 $|A_i|=t$, 则恰有 $\binom{t-12}{k-12}$ 个 k 元子集 C 使得 $B_i\subseteq C\subseteq A_i$ (约定 $u<v$ 时 $\binom{u}{v}=0$), 故

$$\binom{2019}{k}=\sum_{t=12}^{2019}x_t\binom{t-12}{k-12}.$$

依次令 $k=2019,\ 2018,\ 2017\cdots12$, 得到

$$\begin{aligned}
x_{2019}&=\binom{2019}{2019},\\
x_{2018}&=\binom{2019}{2018}-\binom{2007}{2006}x_{2019},\\
x_{2017}&=\binom{2019}{2017}-\binom{2007}{2005}x_{2019}-\binom{2007}{2006}x_{2018},\\
&\ \ \vdots\\
x_{12}&=\binom{2019}{12}-\binom{2007}{0}x_{2019}-\binom{2007}{1}x_{2018}-\cdots-\binom{2007}{2006}x_{13}.
\end{aligned}$$

因此可依次解出 $x_{2019},\ x_{2018},\ \cdots,\ x_{12}$, 我们证明 $x_k=\binom{2030-k}{11}\,(12\le k\le 2019)$, 这只要验证等式

$$\binom{2019}{k}=\sum_{t=12}^{2019}\binom{2030-t}{11}\binom{t-12}{k-12}.$$

事实上, $\binom{2030-t}{11}$ 等于方程

$$y_1+y_2+\cdots+y_{12}=2031-t$$

的正整数解解数, $\binom{t-12}{k-12}$ 等于方程

$$z_1+z_2+\cdots+z_{k-11}=t-11$$

的正整数解解数, 故 $\sum\limits_{t=12}^{2019}\binom{2030-t}{11}\binom{t-12}{k-12}$ 等于方程

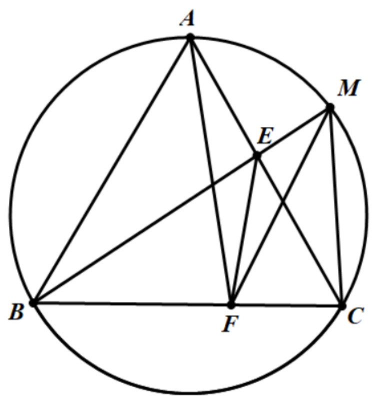
$$y_1+y_2+\cdots+y_{12}+z_1+\cdots+z_{k-11}=2020$$

的正整数解解数, 即 $\binom{2019}{k}$.

综上, 所说情况可能发生, 且使得 $|A_i|=27$ 成立的 i 的数目只能为 $x_{27}=\binom{2003}{11}$. □

评注 在说明了 $x_{2019}, x_{2018}, \cdots, x_{12}$ 唯一确定后, 由我们的例子便已经可说明 $x_{27}=\binom{2003}{11}$. 但本题先研究 x_k 可能会比构造例子容易, 即例子是我们试算出 $x_k=\binom{2030-k}{11}$ 后受数字启发而造. 写解答时把例子写在前面更合逻辑.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$. M 为劣弧 AC 上一点, BM 与 AC 相交于点 E, $\angle BMC$ 的平分线与 BC 相交于点 F. 若 $\angle AFB=\angle CFE$, 证明: $\triangle ABC$ 是等边三角形.



证明 由 $AB=AC$ 知 $\angle ABF=\angle ECF$, 又 $\angle AFB=\angle CFE$, 故 $\triangle ABF\sim\triangle ECF$. 因此

$$\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{CE}.$$

由 MF 平分 $\angle BMC$ 可知

$$\frac{BF}{CF}=\frac{BM}{CM}.$$

故 $\frac{AB}{CE}=\frac{BM}{CM}$, 即有

$$\frac{AB}{BM}=\frac{CE}{CM}=\frac{BE}{BA}.$$

结合 $\angle ABE=\angle MBA$ 知 $\triangle ABE\sim\triangle MBA$, 故

$$\angle BAC=\angle AMB=\angle ACB.$$

即 $\triangle ABC$ 是等边三角形. □

评注 利用 $\triangle ABF \sim \triangle ECF$ 得到比例式后消去 AF 和 BF, 简化了问题. 本题是简单题.

5. 设函数 $f:\{1,\ 2\cdots 2019\}\to\{-1,\ 1\}$ 满足对任意 $1\le k\le 2019$, 都存在 $1\le l\le 2019$ 使得

$$\sum_{i:(i-k)(l-i)\ge 0} f(i)\le 0.$$

求 $\sum\limits_{i=1}^{2019} f(i)$ 的最大值.

解 令

$$f(i)=\begin{cases}1, & i\equiv 0,\ 1(\bmod 3),\\ -1, & i\equiv 2(\bmod 3).\end{cases}$$

符合要求, 此时 $\sum\limits_{i=1}^{2019} f(i)=673$. 下证 $\sum\limits_{i=1}^{2019} f(i)\le 673$.

法 1 我们证明将 2019 换为一般的 $3n\,(n\in\mathbb{Z}_+)$ 时, $\sum\limits_{t=1}^{3n} f(i)\le n$.

对 n 归纳, $n=1$ 时 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 不能全为 1, 故 $f(1)+f(2)+f(3)\le 1$, 结论成立.

假设 $n-1$ 时结论成立, 考虑 n 时的情形. 若存在 $1\le i<j\le 3n,\ i+1<j$, 使得 $f(i)=f(j)=1$, 而对 $i<k<j$, 都有 $f(k)=-1$. 如下定义函数 g :

$$g(k)=\begin{cases}f(k), & 1\le k\le i-1,\\ f(k+2), & i\le k\le j-3,\\ f(k+3), & j-2\le k\le 3n-3.\end{cases}$$

则 $g:\{1,\ 2,\cdots,3(n-1)\}\to\{-1,\ 1\}$, 我们验证 g 满足 $n-1$ 时的条件.

对 $1\le k\le i-1$ 存在以 k 为始末项的连续若干项的关于 f 的函数值之和(设为 S_1)非正, 即 $S_1\le 0$. 它们对应的 g 的函数值记为 S_2. S_2 要么与 S_1 中项相同, 要么比 S_1 中少 $f(i)$, 要么比 S_1 中少 $f(i), f(i+1)$, 要么比 S_1 中少 $f(i), f(i+1), f(j)$, 均有 $S_2\le S_1\le 0$. 对 $j-2\le k\le 3n-3$ 可类似验证. 对 $i\le k\le j-3$ 有 $g(k)=f(k+2)<0$. 从而 g 满足 $n-1$ 时条件.

故由归纳假设

$$\sum_{i=1}^{3n} f(i)=\sum_{i=1}^{3n-3} g(i)+f(i)+f(i+1)+f(j)=\sum_{i=1}^{3n-3} g(i)+1\le (n-1)+1=n.$$

若不存在这样的 $i,\ j$, 由已知 f 不能恒为1, 若此时 $\sum\limits_{i=1}^{3n} f(i)\ge 1$, 则存在

$1 \leq k \leq l \leq 3n$ 使得 $f(k) = f(k+1) = \cdots = f(l) = 1$, 对 $1 \leq i < k$ 与 $l < i \leq 3n$, $f(i) = -1$ 且 $l - k + 1 \geq \dfrac{3n+1}{2}$. 则有 $k \leq 2k-1 < 2l - 3n + 1$, 于是

$$\sum_{i \in Z,\ (i-2k+1)(j-i) \geq 0} f(i) > 0$$

对任意 j 成立, 矛盾!

故 $\sum\limits_{i=1}^{3n} f(i) \leq 0$, 结论得证. □

法 2 记

$$S_k = f(1) + f(2) + \cdots + f(k)\,(1 \leq k \leq 2019)\,,$$

对 $k < k'$, 有

$$|S_{k'} - S_k| = |f(k+1) + \cdots + f(k')| \leq k' - k.$$

由已知, 对任意 $1 \leq k \leq 2019$, 若 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_{k-1} < S_k$, 则存在 $l > k$ 使得

$$S_l \leq S_{k-1} < S_k.$$

设全体这样的 k 为 $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, 由离散介值定理

$$0 \geq S_{k_1} - 1 = S_{k_2} - 2 = \cdots = S_{k_n} - n.$$

对任意 $1 \leq i \leq n$, 存在 $l_i > k_i$, 使 $S_{l_i} < S_{k_i}$, 而 l_i 属于区间

$$[k_1,\ k_2)\,,\ [k_2,\ k_3)\,,\ \cdots,\ [k_n,\ 2019]$$

之一.

1° 若 $l_i \in [k_{j-1},\ k_j)\,(2 \leq j \leq n)$. 由 $S_{l_i} < S_{k_i} \leq S_{k_{j-1}} = S_{k_j} - 1$ 知

$$\begin{aligned} k_j - k_i &= (k_j - l_i) + (l_i - k_{j-1}) + (k_{j-1} - k_i) \\ &\geq \left(S_{k_j} - S_{l_i}\right) + \left(S_{k_{j-1}} - S_{l_i}\right) + \left(S_{k_{j-1}} - S_{k_i}\right) \\ &\geq \left(S_{k_j} - S_{k_i} + 1\right) + \left(S_{k_{j-1}} - S_{k_i} + 1\right) + \left(S_{k_{j-1}} - S_{k_i}\right) \\ &= 3\left(S_{k_j} - S_{k_i}\right) = 3\,(j - i)\,. \end{aligned}$$

2° 若 $l_i \in [k_n,\ 2019]$. 类似地, 由 $S_{l_i} < S_{k_i} \leq S_{k_n},\ S_{k_n} \geq S_{2019}$ 知

$$\begin{aligned} 2019 - k_i &= (2019 - l_i) + (l_i - k_n) + (k_n - k_i) \\ &\geq (S_{2019} - S_{l_i}) + (S_{k_n} - S_{l_i}) + (S_{k_n} - S_{k_i}) \\ &\geq (S_{2019} - S_{k_i} + 1) + (S_{2019} - S_{k_i} + 1) + (S_{2019} - S_{k_i}) \\ &= 3\,(S_{2019} - S_{k_i}) + 2 \geq 3\,(S_{2019} - i) + 2. \end{aligned}$$

现令 $i_1 = 1$, 假设已取好 i_t, 若 $l_{i_t} \in [k_{j-1},\ k_j)$, 则令 $i_{t+1} = j$; 若 $l_{i_t} \in [k_n,\ 2019]$,

则停止选取. 设我们选出了 $i_1, i_2, \cdots, i_t$, 则由 $1°, 2°$,

$$\begin{aligned}2019 &= k_{i_1} + (k_{i_2} - k_{i_1}) + \cdots + \left(k_{i_t} - k_{i_{t-1}}\right) + (2019 - k_{i_t}) \\ &\geq i_1 + 3(i_2 - i_1) + \cdots + 3(i_t - i_{t-1}) + 3(S_{2019} - i_t) + 2 \\ &= 3S_{2019}.\end{aligned}$$

□

评注 答案容易猜到, 解法一找到了一个普适的结构用于归纳, 但发现它需一定巧想. 解法二稍繁, 通过找适当的下标子列, 可以较清楚地刻画 S_k 的变化.

6. 对于整数 $n \geq 3$, 整数 a 称为 $n-$好的, 若存在正整数 d, 使得

$$n \mid a^d - 1,\ n \nmid a^{d-1} + a^{d-2} + \cdots + 1.$$

设 $f(n)$ 是集合 $\{a \mid 0 < a < n, (a,\ n) = 1,\ 但\ a\ 不是\ n-好的\}$ 的元素个数. 求 $f(n)\,(n \geq 3)$ 的最小值, 并求出所有 $n\,(\geq 3)$ 使得 $f(n)$ 取到该最小值.

解 $f(n)$ 的最小值为 1, 使 $f(n) = 1$ 的全体 $n \geq 3$ 形如 $2^\alpha\,(\alpha \geq 2)$ 或 $3 \cdot 2^\alpha\,(\alpha \geq 0)$.

首先注意: 1 总是 $n-$好的, 对 $a > 1$, 有 $a^{d-1} + a^{d-2} + \cdots + 1 = \frac{a^d-1}{a-1}$, 若 a 是 $n-$ 好的, 显然 $(a, n) = 1$.

断言 若 $a\,(> 1)$ 为 $n-$好的, 则可不妨设 a 对应的 d 为 a 模 n 的阶.

证明 设 $a > 1$ 为 $n-$好的, 即存在 $d > 0$,

$$n \mid a^d - 1,\ n \nmid \frac{a^d - 1}{a - 1}. \tag{1}$$

设 d_0 为 a 模 n 的阶, 则 (1) 的前者推出 $d_0 \mid d$, 从而由

$$\frac{a^{d_0} - 1}{a - 1} \mid \frac{a^d - 1}{a - 1}$$

及 (1) 的后者可见 $n \nmid \frac{a^{d_0}-1}{a-1}$. 因此存在满足 (1) 的 d 当且仅当 $d = d_0$ 满足 (1), 断言得证.

设 $n \geq 3$, 若 $n - 1$ 是 $n-$好的, 由断言知不妨设 $d = 2$, 推出

$$n \nmid \frac{(n-1)^2 - 1}{(n-1) - 1} = n,$$

矛盾. 故 $n - 1$ 总不是 $n-$好的, 从而 $f(n) \geq 1$, 又 $f(3) = 1$, 故 $f(n)$ 的最小值是 1.

下面求所有的 $n \geq 3$ 使得 $f(n) = 1$, 这即是说 1, 2, $\cdots$, $n - 2$ 中每个与 n 互素的数 a 均是 $n-$好的. $(*)$

若 n 是大于 3 的奇数, 则由

$$n \mid 2^d - 1 \Leftrightarrow n \mid \frac{2^d - 1}{2 - 1}$$

可见 2 不是 $n-$好的, 与 $(*)$ 矛盾, 故 n 是偶数. 可设 $n = 2^\alpha r$, 其中 $\alpha \geq 1$, r 是奇数. 分类讨论如下:

I. 如果 $r > 3$, 设 r 的最小素因子是 $p\,(> 2)$, 模 p 的最小正原根是 g, 则 $1 < g \leq p - 1$, 故 $(g,\ r) = 1$. 我们取 $a \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 使得

$$\begin{cases} a \equiv g\,(\mathrm{mod} r)\,, \\ a \equiv -1\,(\mathrm{mod} 2^\alpha)\,, \end{cases} \tag{2}$$

由中国剩余定理 (注意 $(r,\ 2) = 1$) 知这样的 a 存在, 且由 $(g,\ r) = 1$ 易见 $1 < a < n$, $(a,\ n) = 1$.

设 $d > 0$ 满足 $n \big| a^d - 1$, 则特别地, $a \equiv g \pmod p$, $p \mid a^d - 1$. 故 d 被 a 模 p 的阶 $p - 1$ 整除, 从而 $2 \mid d$. 故

$$a + 1 \mid \frac{a^d - 1}{a - 1} \Rightarrow 2^\alpha \mid \frac{a^d - 1}{a - 1}.$$

此外, 注意到 p 是 r 的最小素因子, $1 \leq g - 1 < p$, 及 $a - 1 \equiv g - 1 \pmod p$ 可知 $(a - 1,\ r) = 1$, 故

$$r \mid a^d - 1 \Rightarrow r \mid \frac{a^d - 1}{a - 1}.$$

所以 $n = 2^\alpha r$ 整除 $\frac{a^d-1}{a-1}$, 从而 a 不是 $n-$好的.

若 $a = n - 1$, 由 (2) 易见 $g = p - 1$, $r = p$, 从而

$$p - 1 = g \text{ 模 } p \text{ 的阶 } = p - 1 \text{ 模 } p \text{ 的阶 } = 2.$$

可得 $r = p = 3$, 矛盾. 故 $2 \leq a \leq n - 2$, $(a,\ n) = 1$, 且 a 不是 $n-$好的, 与 $(*)$ 矛盾. 从而在 $r > 3$ 时 n 不满足要求.

II. 如果 $r \in \{1,\ 3\}$, 我们证明这样的 n 满足要求, 即对 $a \in \{2,\ 3,\ \cdots,\ n - 1\}$, $(a,\ n) = 1$, 设 d 是 a 模 n 的阶, 则 $n \nmid \frac{a^d-1}{a-1}$. 为了确定奇数 a 模 2^α 的阶, 我们需要下面熟知的引理:

引理 (1) 设 a 是奇数, $a \equiv 1 \pmod 4$, $a \neq 1$, k_0 满足 $2^{k_0} \| a - 1$, 记 l_k 是 a 模 2^k 的阶, 则有

$$l_k = \begin{cases} 1, \text{ 若 } k = 1,\ \cdots,\ k_0, \\ 2^{k-k_0}, \text{ 若 } k > k_0. \end{cases}$$

(2) 设 a 是奇数, $a \equiv -1 \pmod 4$, $a \neq -1$, k_0 满足 $2^{k_0} \| a + 1$, 记 l_k 是 a 模

2^k 的阶, 则有

$$l_k=\begin{cases}1,\ 若\ k=1,\\[2ex] 2,\ 若\ k=2,\ \cdots,\ k_0+1,\\[2ex] 2^{k-k_0},\ 若\ k>k_0+1.\end{cases}$$

引理的证明可对 k 归纳进行, 这里不再赘述. 不过在归纳时容易发现对引理中 (1) 的 $k\geq k_0$ 的情形和 (2) 中 $k\geq k_0+1$ 的情形, 有 $2^k\|a^{l_k}-1$.

$\alpha=1$ 时, $n=3,\ 6$, 易验证满足条件. $\alpha\geq 2$ 时, a 模 2^α 的阶可设为 2^l (注意欧拉定理), $l\geq 1$, 则 a 模 $3\cdot 2^\alpha$ 的阶也是 2^l. 在引理中取 $k=\alpha$, 对(1)(2)两种情况均有 $\alpha\geq k_0+1$, 故由前述知 $2^\alpha\|a^d-1$, 而 $a-1$ 是偶数, 故 $2^\alpha\nmid\frac{a^d-1}{a-1}$, 从而 $n\nmid\frac{a^d-1}{a-1}$. 证毕.

综上所述, $f(n)$ 的最小值为 1, 使得 $f(n)=1$ 的全体 $n\,(\geq 3)$ 形如 $2^\alpha(\alpha\geq 2)$ 或 $3\cdot 2^\alpha\,(\alpha\geq 0)$. □

评注 出于确定 d 的目的可以看出“断言”成立, 且容易发现 $f(n)$ 的最小值是 1. 求使 $f(n)=1$ 成立的 n 时, 首先考虑特殊值 $a=2$ 可排除奇数 n, 对偶数 n 希望用对奇数类似的手段, 则可用中国剩余定理分成奇数部分 r 和 2^α 分别构造 a 的余数. 取原根的目的仅是让 $2\mid d$, 而最小素因子的最小正原根保证了 $(a-1,\ r)=1$. 其实对奇数 n 的处理也可取 $a\equiv g\pmod n$, 其中 g 是 r 的最小素因子的最小正原根.

本题要求对阶、升幂定理、中国剩余定理有一定理解, 综合性较强. 求满足取等条件的 n 有两方面, 对答案没把握的话探索比较费时.