一道“五难”数论题浅析

冯跃峰

2018 年全国高中数学联赛加试中, 有一道个人认为是质量非常高的数论题, 题目如下:

题 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: a_1 是任意正整数, a_{n+1} 是与 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 互质, 且异于 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 的最小正整数. 试证: 每个正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

本题有较大的难度, 我们称之为“五难”问题——至少有 5 个难点.

说其难, 并非是它涉及什么高深的数论知识背景, 而是指思维层面上一些作法难于想到. 相反地, 本题几乎无需用到数论中的相关定理.

本文的目的, 就是发掘本题在突破这些难点上的独特思路及相应的处理手法.

首先, 从目标看, 即使是取一个具体的数, 比如 2018, 你也无从判断它是否属于 W (数列 $\{a_n\}$ 各项组成的集合).

本题的独特之处就在于: 证某个具体的正整数出现在题给数列 W 中却很困难, 而证所有正整数出现在数列 W 中则反而可行(以面带点)! 因为我们有一个强有力的工具: 数学归纳法——在归纳假设(某个数属于 W)的前提下, 可顺利推出下一个数也属于 W, 这是解题的第一个难点.

其次, 从条件看, 直接对 n 归纳是不可取的, 因为“正整数 n 属于 W ”与“正整数 $n+1$ 属于 W ”之间并没有递推关系, 题中给出的递归是 a_{n+1} 与前 n 项 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 之间的联系, 无法直接用于判断“正整数 $n+1$ 也属于W ”.

应对谁进行归纳？题中并没有更多的归纳对象可供选择, 这是第二个难点, 这也是本题最关键的难点之一.

实际上, 我们不能对正整数一个个归纳, 只能对正整数的某种属性归纳(分批归纳, 同一属性批次含多个正整数).

修订日期: 2020-02-05.

应考察正整数的什么属性呢？不妨取一个具体的数列 $\{a_n\}$ 来研究, 从中发现与“递归”相关的性质.

【研究特例】 取 $a_1=1$, 则易知数列前若干项为:

$$1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 7,\ 5,\ 9,\ \cdots$$

该序列各项之间似乎没有什么联系, 但这些项却有一个共同点, 你发现了吗？——可考察其标准分解式.

【发掘规律】 这些数都只含有一个质因数, 为 p^α 形式的数.

它启发我们产生这样的设想: 对于只含有一个质因数的正整数 p^α, 可以统一于一个批次中一次性证明其都属于 W .

由此想到所选择归纳对象是: 正整数 n 的不同质因数个数——突破本题最大的难点.

【分批归纳】 对正整数含有不同质因数的个数 τ 进行归纳.

当 $\tau=1$ 时, 正整数为 p^α 形式, 我们证明任何 p^α 形式的数都在数列中.

要证明 $p^\alpha\in W$, 可想象 $p^\alpha=a_j$. 这自然想到验证 p^α 满足 a_j 定义中的“三性”:

(1) 互异性: a_j 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1}$;

(2) 互素性: $(a_j,\ S_{j-1})=1$;

(3) 最小性: a_j 是满足 (1) (2) 的最小正整数.

但数列 $\{a_n\}$ 及 p^α 都没有具体给定, 难以从正面找到合乎 (1) (2) (3) 的正整数 j, 只能从反面行验证某个条件“不满足”, 由反设“ $p^\alpha\notin W$ ”, 导出矛盾. ——这是本题的第三个难点.

【反面思考】 反设 $p^\alpha\notin W$, 则显然 p^α 满足 (1), 所以 p^α 不能同时满足 (2) 和 (3) .

这能产生怎样的“有用信息”呢？它还非常隐蔽, 很难进一步推理. ——这是本题的第四个难点, 也是本题的另一个关键之处.

尽管不能直接由“ p^α 不能同时满足 (2) 和 (3) ”导出相关结论, 但也可以看出一些端倪. 比如, 我们期待 p^α 不满足 (2), 即

$$(p^\alpha,\ S_{j-1})\neq 1,$$

因为由此可得出 $p|S_{j-1}$ (有用信息).

现在麻烦的是, 我们不能先让 p^α 满足 (3), 因为满足 (3) 是以满足 (1) (2) 为

前提的. 所以, 我们期待适当选取关联对象 a_j, 由 a_j 满足 (3) 来"倒逼" p^α 不满足 (2), 这是本题的另一个最难之处.

为利用 a_j 的"最小性", 想到取 $p^\alpha < a_j$. 因为这样一来, p^α 比 a_j 更小, 再"嵌入"一个"反证法"(反设 p^α 满足 (2))则可导出与 a_j 的"最小性"矛盾.

【关联性质】 取数列中的一个项 a_j, 使 $p^\alpha < a_j$, 则有

$$(p^\alpha,\ S_{j-1}) \neq 1, \text{ (产生有用信息)}$$

否则与 a_j 的最小性矛盾.

现在的问题是, 这样的 a_j 存在吗? 回答是肯定的, 利用数列的无限性即可.

【反面剔除】 因为不超过 p^α 的正整数只有有限个, 必定存在正整数 N, 使 $j \geq N+1$ 时, 恒有 $p^\alpha < a_j$.

取 $j = N+1$, 可知

$$(p^\alpha,\ S_N) \neq 1,$$

否则与 a_{N+1} 的最小性矛盾, 所以 $p \mid S_N$. 取 $j = N+2$, 类似可知,

$$(p^\alpha,\ S_{N+1}) \neq 1,$$

即 $p \mid S_{N+1}$. 但

$$(S_{N+1},\ S_N) = (S_{N+1} - S_N,\ S_N) = (a_{N+1},\ S_N) = 1,$$

与 p 是"公约数"矛盾.

所以, $\tau = 1$ 时结论成立.

值得指出的是, 此处的归纳法, "奠基"比"递推"更难. 完成了奠基, 后面的递推就非常顺畅了, 几乎与前面的推理类似, 当然需稍作优化(还有最后一个难点).

设 $\tau < k$ $(k \geq 2)$ 时结论成立, 考察 $\tau = k$ 的情形.

与 $\tau = 1$ 时类似, 难以从正面证明相应的正整数属于 W, 宜从反面入手.

【平凡拓广】 反设存在正整数

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \notin W.$$

这里 α_i 是正整数, 以保证 x 含有 k 个不同质因数. 取关联条件:设正整数 j, 满足 $x < a_j$, 则必有

$$(x,\ S_{j-1}) \neq 1,$$

否则与 a_j 的最小性矛盾.

【反面剔除】 同样, 因为不超过 $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 的正整数只有有限个,

必定存在正整数 N, 使 $j \geq N+1$ 时, 恒有

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}<a_j.$$

类似地, $(x,\ S_{j-1}) \neq 1$ (否则与 a_j 的最小性矛盾).

所以, 存在 $1 \leq i \leq k$, 使

$$p_i|S_{j-1}\ (\forall j \geq N+1). \tag{$*$}$$

【差异分析】 注意到这里的 p_i 有不同取值(因为 x 含有的质因数不唯一), 与 j 相关, 从而不能说明所有 $S_j(j \geq N+1)$ 有公共质因数.

由此想到, 找一个公共的约数

$$p \in p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k,$$

及两个相邻的部分和: $S_j,\ S_{j-1}$, 使

$$p \mid S_j,\ p \mid S_{j-1}\ (j \geq N+1).$$

这样, 便可与 $(S_{j-1},\ S_j)=1$ 矛盾.

如何找到公共的约数 p？这当然要恰当地利用归纳假设——这是本题的第 5 个难点.

【角色分析】 所谓 $\tau=k-1$ 成立, 就是所有形如

$$y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}(\beta_i>0)$$

的正整数都属于 W, 取其中一个

$$y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}=a_j.$$

这里取定的 j, 假定能使前面的($*$)式仍然成立, 这也只需 j 满足

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}<a_j,$$

即 $j \geq N+1$.

对这样的 j, 仍存在 $1 \leq i \leq k$, 使 $p_i \mid S_{j-1}$. 但由数列定义

$$(a_j,\ S_{j-1})=1,$$

这表明 $p_i\ (1 \leq i \leq k-1)$ 都不能是 S_{j-1} 的约数.

由此可见, 满足“$p_i \mid S_{j-1}$”中的 p_i 不能是 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{k-1}$ 之一, 只能是剩下的唯一质因子 p_k, 它便是我们要找的作为公共质因子 p.

【目标转换】 这样, 子目标变为:存在 $j \geq N+1$, 使

$$p_k \mid S_j,\ p_k \mid S_{j-1}.$$

对上面选定的 j ($y \in W$ 推得 $y = a_j$), 并未保证 $j \geq N+1$, 需要优化.

【优化假设】 显然, 为保证 $j \geq N+1$, 只需 $y = a_j$ 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$.

此外, $(*)$中的"$p_i \mid S_{j-1}$"是由"$x < a_j$"推得的, 为了存在 $1 \leq i \leq k$, 使 $p_i \mid S_{j-1}$, 必须 $x < a_j$, 即

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = x < a_j = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}.$$

所以, 归纳假设中所取的正整数 y 应同时满足: $y > x$, 且 y 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ (以保证 $j \geq N+1$), 这两点能否同时做到?——类似进行反面剔除即可.

【反面剔除】 注意到 y 的"表达式"中的指数 $\beta_i (1 \leq i \leq k-1)$ 可任意大, 从而

$$y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$$

可任意大, 取 $y = a_j > x$, 且 $y = a_j$ 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 是可行的.

对于上述"优化"选定的 $y = a_j$, 有 $a_j > x$, 且 $j \geq N+1$.

但 x 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1}$ (因为 x 不属于 W), 所以 $(x,\ S_{j-1}) \neq 1$ (否则与 a_j 的最小性矛盾), 即存在 $1 \leq i \leq k$, 使 $p_i \mid S_{j-1}$.

进一步, $j+1 \geq N+1$, 且 $a_j > x$, 对上述取定的 j, 又存在存在 $1 \leq t \leq k$, 使 $p_t \mid S_j$.

由数列定义, 有

$$(a_j,\ S_{j-1}) = 1,$$

进而有,

$$(a_j,\ S_j) = (a_j,\ S_j - a_j) = (a_j,\ S_{j-1}) = 1.$$

再注意到

$$a_j = y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$$

含有质因数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{k-1}$, 所以 $S_j,\ S_{j-1}$ 都不含质因数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{k-1}$. 只能是 $i = t = k$, 即 $p_k \mid S_{j-1},\ p_k \mid S_j$.

但

$$(S_j,\ S_{j-1}) = (S_j - S_{j-1},\ S_{j-1}) = (a_j,\ S_{j-1}) = 1,$$

矛盾.

【新写】 设数列 $\{a_n\}$ 各项组成的集合为 W, 我们证明任何正整数都属于 W. 对正整数所含不同质因数个数 τ 归纳. 当 $\tau = 1$ 时, 假定存在 $p^\alpha \notin W$, 因为

不超过 p^α 的正整数只有有限个, 必存在正整数 $N,\ N+1$, 使

$$p^\alpha < a_{N+1},\ p^\alpha < a_N + 2.$$

易知 $(p^\alpha,\ S_N) \neq 1$, 否则与 a_{N+1} 的最小性矛盾, 所以 $p \mid S_N$. 同理, $p \mid S_{N+1}$. 但

$$(S_{N+1},\ S_N) = (S_{N+1} - S_N,\ S_N) = (a_{N+1},\ S_N) = 1,$$

矛盾.

所以, $\tau = 1$ 时结论成立.

设 $\tau < k\ (k \geq 2)$ 时结论成立, 考察 $\tau = k$ 的情形.

假定存在正整数

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \notin W,$$

必存在正整数 N, 使 $n \geq N+1$ 时, $a_n > x$.

由归纳假设, 形如 $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$ 的数都属于 W, 这样的数有无穷多, 可取正整数

$$a_j = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}},$$

使 a_j 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ (即 $j \geq N+1$), 且 $a_j > x$.

但 x 异于 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1}$ (因为 x 不属于 W), 所以 $(x,\ S_{j-1}) \neq 1$ (否则与 a_j 的最小性矛盾), 即存在 $1 \leq i \leq k$, 使 $p_i \mid S_{j-1}$.

进一步, $j+1 \geq N+1$, 且 $a_j + 1 > x$, 对上述取定的 j, 又存在存在 $1 \leq t \leq k$, 使 $p_t \mid S_j$.

由数列定义, $(a_j,\ S_{j-1}) = 1$, 进而

$$(a_j,\ S_j) = (a_j,\ S_j - a_j) = (a_j,\ S_{j-1}) = 1,$$

并注意到

$$a_j = y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$$

含有质因数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{k-1}$, 所以 $S_j,\ S_{j-1}$ 都不含质因数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{k-1}$. 只能是 $i = t = k$, 即 $p_k \mid S_{j-1},\ p_k \mid S_j$. 但

$$(S_j,\ S_{j-1}) = (S_j - S_{j-1},\ S_{j-1}) = (a_j,\ S_{j-1}) = 1,$$

矛盾, 故 $\tau = k$ 时结论成立, 命题获证. □