两道类似的不定方程

王子彧　肖行健

(山西大学附属中学, 200231)

本文主要讨论一下以下两个问题: 2019 年 9 月的第三十四期新星征解第四题与 2019 年 10 月的北大金秋营第八题. 这两题从做法上大致相近, 本文主要介绍我们的解法, 供有兴趣者参考.

例 1 *是否存在非零整数 a,b,c 使得 $3a^4+4b^4=19c^4$?* (1)

(第三十四期新星征解第四题)

分析 在这道题中首先注意到 $3+4\times 2^2=19$ 与题干类似, 考虑移项利用平方差公式进行因式分解. 不妨考虑 a,b,c 两两互质, 再对因式分解后的式子素因子分析, 以及常见的模一些小数后, 再考虑之后如何进行. 之后的想法是本题的关键, 会写在证明的后方.

解 当存在素数 p 整除 a,b,c 中两个数时, 易知 p 整除第三个数, 所以可不妨设 a,b,c 两两互素.

此时若 $2\mid a\Rightarrow 2\mid c$, 则 a,c 不互素, 矛盾! 所以 a,c 均为奇数, 左右两边 $\bmod 8$, 可知 b 为偶数.

又 (1) 可化简为 $4b^4-16c^4=3c^4-3a^4$, 即

$$4(b^2-2c^2)(b^2+2c^2)=3(c^2-a^2)(c^2+a^2).$$

当 $3\mid(b^2-2c^2)$, 利用 $\left(\frac{2}{3}\right)=-1$, 可知 $3\mid b, 3\mid c$, 与 b,c 互素矛盾, 所以 $3\mid(b^2+2c^2)$. 通过 $\bmod 8$, 又可知

$$2\mid(b^2-2c^2),\ 2\mid(b^2+2c^2),\ 2\mid(c^2+a^2).$$

所以可写

$$\frac{b^2-2c^2}{2}\cdot\frac{b^2+2c^2}{6}=\frac{c^2-a^2}{8}\cdot\frac{c^2+a^2}{2}, \tag{2}$$

修订日期: **2020-02-01.**

其中四个分式均为整数. 利用 a,b,c 两两互素, 可知

$$\left(\frac{b^2-2c^2}{2},\frac{b^2+2c^2}{6}\right)=1,\ \left(\frac{c^2-a^2}{8},\frac{c^2+a^2}{2}\right)=1.$$

(i) 当 $c^2>a^2$, 则存在两两互素的正整数 x,y,z,w 使得:

$$\begin{cases}\frac{b^2-2c^2}{2}=xy\\ \frac{b^2+2c^2}{6}=zw\\ \frac{c^2-a^2}{8}=xz\\ \frac{c^2+a^2}{2}=yw\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2=3zw+xy\\ 2c^2=3zw-xy\\ c^2=4xz+yw\\ a^2=yw-4xz\end{cases}.$$

对比 c^2 可知 $8xz+2yw=3zw-xy$, 即 $(x+2w)(y+8z)=19zw$.

因为 $(y,z)=1$, 所以 $(z,y+8z)=1$, 所以 $z\mid(x+2w)$. 同理 $w\mid(y+8z)$, 所以

$$\begin{cases}x+2w=z\\ y+8z=19w\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+2w=19z\\ y+8z=w\end{cases}.$$

用 x,y 标识 z,w 代入 a,b,c 表达式知

$$\begin{cases}a^2=\frac{y^2-76x^2}{3}\\ b^2=\frac{2(y^2+19xy+76x^2)}{3}\\ c^2=\frac{y^2+16xy+76x^2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\frac{19y^2-4x^2}{3}\\ b^2=\frac{2(19y^2+19xy+4x^2)}{3}\\ c^2=\frac{19y^2+16xy+4x^2}{3}\end{cases}.$$

前者 $y^2=3a^2+76x^2$ 两边模 19. 当 $(19,y)=1$, 则 3 是 19 的二次剩余, 这与 $\left(\frac{3}{19}\right)=(-1)^{\frac{2\times18}{4}}\cdot\left(\frac{19}{3}\right)=-1$ 矛盾! 所以 $19\mid y\Rightarrow 19\mid a\Rightarrow 19\mid x$, 与 x,y 互质矛盾!

后者 $2\mid b$, 所以 $2\mid 19y^2+19xy$. 因为 a 为奇数, 所以 y 为奇数, 所以 x 为奇数, 因为 $3a^2+4x^2=19y^2$, 模 $8\Rightarrow 3+4=19(\mathrm{mod}8)$ 矛盾!

(ii) 当 $c^2<a^2$, 基本类似的, 存在两两互素的正整数 x,y,z,w 使得:

$$\begin{cases}\frac{2c^2-b^2}{2}=xy\\ \frac{b^2+2c^2}{6}=zw\\ \frac{a^2-c^2}{8}=xz\\ \frac{c^2+a^2}{2}=yw\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2=3zw-xy\\ 2c^2=3zw+xy\\ c^2=yw-4xz\\ a^2=4xz+yw\end{cases}.$$

对比 c^2 可知 $2yw-8xz=3zw+xy$, 即 $(2w-x)(y+8z)=19zw$.

同理可化简变为下式, 并以类似的理由矛盾.

$$\begin{cases}a^2=\frac{y^2-76x^2}{3}\\ b^2=\frac{2(y^2-19xy+76x^2)}{3}\\ c^2=\frac{y^2-16xy+76x^2}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a^2=\frac{19y^2-4x^2}{3}\\ b^2=\frac{2(19y^2-19xy+4x^2)}{3}\\ c^2=\frac{19y^2-16xy+4x^2}{3}\end{cases}.$$

评注 对因式分解后的式子, 利用乘积相等以及互素, 我们进行了分解, 并找到了矛盾, 可以发现, 一般矛盾大多可用模一些常数如 8, 以及二次剩余得到, 还有一部分可以通过不等式进行控制 (例 2). 类似的利用乘积相等和互素的条件, 有兴趣的读者可以做一下下面这道题:

证明: 不存在有理数 x, y 使得 $x-\frac{1}{x}+y-\frac{1}{y}=4$.

在解决北大金秋营第八题以前, 我们需要先证一个熟悉的引理.

例 2 证明:使得 $\frac{x+1}{2}, \frac{x^2+1}{2}$ 均为平方数的正整数 x 只有 1 和 7.

证明

引理 1 勾股方程本原解公式, 此处略.

引理 2 若整数 x, y, z 满足 $x^4+y^4=z^2$ 或 $x^4-y^4=z^2$, 则有 $xyz=0$ 成立.

引理 1,2 证明略.

引理 3 若非负整数 x, y 满足 $2x^2-y^4=1$, 则有 $x=y=1$.

证明 配方知 $x^4-y^4=(x^2-1)^2$, 由引理 2, $x=1$.

引理 4 若非负整数 x, y 满足 $x^4-2y^2=1$, 则有 $x=1, y=0$.

证明 配方知 $x^4+y^4=(y^2+1)^2$, 由引理 2, $x=1$.

回到原题. 设 a, b 为正整数满足$\begin{cases}\frac{n+1}{2}=a^2\\ \frac{n^2+1}{2}=b^2\end{cases}$,则$\begin{cases}n=2a^2-1\\ n^2=2b^2-1\end{cases}$. 即

$$b^2=2a^4-2a^2+1=a^4+(a^2-1)^2.$$

$a=1$ 满足, 下设 $a \geq 2$, 由于 $(a, a^2-1)=1$ 知存在非负互质整数 c, d, 且一奇一偶满足

$$\begin{cases}a^2=2cd\\ a^2-1=c^2-d^2\\ b=c^2+d^2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a^2=c^2-d^2\\ a^2-1=2cd\\ b=c^2+d^2\end{cases}.$$

当 a 为偶数时, 必为前者, 设 $a=2m$, 则$\begin{cases}2m^2=cd\\ 4m^2-1=c^2-d^2\end{cases}$. mod4 知 c 为偶数 d 为奇数, 因为 c, d 互质且 $2m^2=cd$. 所以存在互质整数 e, f 满足

$$\begin{cases}c=2e^2\\ d=f^2\\ m=ef\end{cases}$$

推出

$$4e^2f^2-1=4e^4-f^4,$$

即
$$\frac{f^2+2e^2-1}{2}\times\frac{f^2+2e^2+1}{2}=2e^4.$$

由于前面两个分式对应整数互质, 所以存在整数 g,h 满足
$$\begin{cases}\frac{f^2+2e^2+1}{2}=g^4\\ \frac{f^2+2e^2-1}{2}=2h^4\\ e=gh\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{f^2+2e^2+1}{2}=2h^4\\ \frac{f^2+2e^2-1}{2}=g^4\\ e=gh\end{cases}$$
前者知 $g^4-2h^4=1$, 由引理 4 矛盾; 后者为 $2h^4-g^4=1$, 由引理 3, $g=h=1$, 从而可推出 $e=f=1,c=2,d=1,m=1,a=2,n=7$.

若 a 为奇数, 则$\begin{cases}a^2=c^2-d^2\\ a^2-1=2cd\end{cases}$,即$\begin{cases}a^2+d^2=c^2\\ a^2-1=2cd\end{cases}$.

由于 c,d 互质. 所以存在互质整数 e,f 满足
$$\begin{cases}a^2=e^2-f^2\\ d=2ef\\ c=e^2+f^2\end{cases}.$$
推出
$$(e^2-f^2)^2-1=2(e^2+f^2)\times 2ef,$$
即 $(e-f)^4-2\times(2ef)^2=1$. 由引理 4 矛盾!

从而满足条件的 x 只有 1 和 7. □

评注 通过因式分解降次或其他方法构建勾股方程, 来解不定方程是解 2,4 次不定方程常用方法, 本题前面的四个引理均非常常见, 需要读者有良好的勾股方程的基础. 类似地, 可以证明使得 $\frac{x-1}{2}$, $\frac{x^2+1}{2}$ 均为平方数的正整数 x 只有 1, 留给读者思考.

例 3 证明: $x^4-20200y^2=1$ 无正整数解.

(2019 北大金秋营第 8 题)

证明 由题可知 x 是奇数, 所以上式可化简为 $\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{2}=202(5y)^2$.

因为 $\left(\frac{x^2-1}{2},\frac{x^2+1}{2}\right)=1$, 所以存在正整数 u,v 使得下式中一个式子成立:
$$\begin{cases}\frac{x^2-1}{2}=202u^2\\ \frac{x^2+1}{2}=v^2\end{cases},\begin{cases}\frac{x^2-1}{2}=101u^2\\ \frac{x^2+1}{2}=2v^2\end{cases},\begin{cases}\frac{x^2-1}{2}=2u^2\\ \frac{x^2+1}{2}=101v^2\end{cases},\begin{cases}\frac{x^2-1}{2}=u^2\\ \frac{x^2+1}{2}=202v^2\end{cases},$$
其中中间两组会产生 $x^2+1=4v^2$ 和 $x^2-1=4u^2$, 这对 x,u,v 均为正整数无解, 对最后一组, 因为 x 为奇数, 所以 $\frac{x^2+1}{2}$ 为奇数, 矛盾!

所以只有第一组可能有解, 此时 $x^2-1=404y^2$, 所以

$$\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}=101u^2.$$

因为 $\left(\frac{x-1}{2},\frac{x+1}{2}\right)=1$, 所以必有 $\frac{x+1}{2},\frac{x^2+1}{2}$ 均为平方数或 $\frac{x-1}{2},\frac{x^2+1}{2}$ 均为平方数, 代入例 2 的解即可. $\square$

评注 由于此类不定方程题型比较常见, 在考场上同学们不要看见他是第八题就放弃, 其实相对压轴题的一般难度是简单的, 同时这类方程相对比较浪费时间, 在考场上需要同学很好的对做题进行规划. 一个误区是容易将此类方程转为 Pell 方程, 但由于此类方程并没有相对很好的性质, 不容易利用 Pell 方程证明此方程无解. 值得一提的是本次秋令营第二天四个题中数论成分比较大, 这对数论好的同学很有优势.

致谢 感谢王永喜老师对笔者的帮助, 感谢罗振华老师对本文创作的支持和修改.