2020 罗马尼亚大师杯试题解答与评析

韩新淼

(浙江省乐清市知临中学, 325600)

指导教师: 羊明亮

2020 罗马尼亚数学大师赛 (Romanian Master of Mathematics) 于 2 月 26 日至 3 月 1 日在罗马尼亚布加勒斯特举行. 由于受到新冠肺炎疫情的影响, 包括我国在内的几个国家无法委派代表队前往现场正式参加比赛. 经协商, 竞赛举办方同意中国、韩国、意大利、伊朗各国代表队以远程方式参加考试.

我有幸作为中国代表队的成员参加了远程考试, 成绩为 31 分, 获得金牌.

本文介绍这次考试试题的解答, 并加以评析. 请读者指正!

I. 试 题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, C 为直角, $CD\perp AB$ 于 D. 令 I 为 $\triangle ABC$ 内切圆 ω 的圆心, ω 与边 BC, CA, AB 分别相切于点 A_1, B_1, C_1. 设 E, F 分别是点 C 关于直线 C_1A_1, C_1B_1 的对称点, K, L 分别是点 D 关于直线 C_1A_1, C_1B_1 的对称点. 证明: $\triangle A_1EI$, $\triangle B_1FI$, $\triangle C_1KL$ 的外接圆共点.

2. 设整数 $N\geq 2$, 数列 $a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N)$, $b=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N)$ 中各项均为非负整数. 对每个整数 $i\notin\{1,\ \cdots,\ N\}$, 取 $k\in\{1,\ \cdots,\ N\}$ 满足 $i-k$ 被 N 整除, 令 $a_i=a_k$, $b_i=b_k$.

我们称 a 是 $b-$调和的, 如果对于每个整数 i, 均有 a_i 等于以下算术平均:

$$a_i=\frac{1}{2b_i+1}\sum_{s=-b_i}^{b_i}a_{i+s}.$$

现在假设 a 与 b 均不为常数数列, 且 a 是 $b-$调和的, b 是 $a-$调和的. 证明: $a_1,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ \cdots,\ b_N$ 中至少有 $N+1$ 项等于零.

3. 设整数 $n\geq 3$. 一个国家有 n 座机场, 且有 n 家执行双向航班的航空公司.

修订日期: **2020-03-04.**

对每家航空公司, 都存在一个奇数 $m \geq 3$ 及 m 座不同的机场 $C_1, C_2, \cdots, C_m$, 满足: 这家航空公司所执行的全部航班恰是 C_1 与 C_2 之间, C_2 与 C_3 之间 , $\cdots$, C_{m-1} 与 C_m 之间, C_m 与 C_1 之间的那些双向航班. 证明: 存在一条由奇数趟航班组成的封闭路线, 其中不同的航班由不同的航空公司执行.

4. 用 $\mathbb{N}^*$ 表示所有正整数的集合. 我们称 $\mathbb{N}^*$ 的一个子集 A 为“无和集”, 如果对 A 中的任意两个(可能相同的)元素 x, y, 它们的和 $x+y$ 不在 A 中.

求所有把无和集映到无和集的满射函数 $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, 即对任意无和集 A, 它的像 $\{f(a)|a \in A\}$ 也是无和集.

注: 一个函数 $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 称为满射, 如果对于每个整数 n, 都存在一个正整数 m 使得 $f(m) = n$.

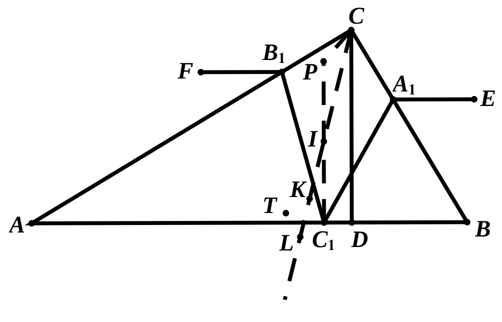
5. 在 $xy-$ 坐标平面中, 横纵坐标都为整数的点称为格点, 所有顶点均为格点的多边形称为“格点多边形”.

令 Γ 为一个凸的格点多边形. 证明: 可将 Γ 置于另一个凸的格点多边形 Ω 内, 使得所有 Γ 的顶点都落在 Ω 的边界上, 并且 Ω 恰有一个顶点不是 Γ 的顶点.

6. 对每个整数 $n \geq 2$. 记 $F(n)$ 为 n 最大的素因子. 一个“奇异对”是一对不同的素数 p 和 q, 使得没有整数 $n \geq 2$ 满足 $F(n)F(n+1) = pq$. 证明: 存在无穷多对奇异对.

II. 解答与评注

1. 在 $\triangle ABC$ 中, C 为直角, $CD \perp AB$ 于 D. 令 I 为 $\triangle ABC$ 内切圆 ω 的圆心, ω 与边 BC, CA, AB 分别相切于点 A_1, B_1, C_1. 设 E, F 分别是点 C 关于直线 C_1A_1, C_1B_1 的对称点, K, L 分别是点 D 关于直线 C_1A_1, C_1B_1 的对称点. 证明: $\triangle A_1EI, \triangle B_1FI, \triangle C_1KL$ 的外接圆共点.



证明 设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C. 在直线 C_1I 上取点 P 满足

$\angle PCD=45^\circ$. 易知 CB_1IA_1 为正方形. 下证: K, I, C 共线.

因为

$$CP=\sqrt{2}C_1D=\sqrt{2}C_1K,\quad CI=\sqrt{2}B_1I=\sqrt{2}C_1I,$$

所以 $\frac{CP}{C_1K}=\frac{CI}{C_1I}$. 又

$$\angle ICP=45^\circ-\angle ICD=\angle BCD=90^\circ-B,$$

且

$$\begin{aligned}\angle IC_1K&=\angle A_1C_1K-\angle A_1C_1I\\&=\angle BC_1A_1-\angle A_1C_1I\\&=90^\circ-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}B=90^\circ-B.\end{aligned}$$

故 $\angle ICP=\angle IC_1K$. 因此, $\triangle ICP\sim\triangle IC_1K$. 于是, $\angle CIP=\angle C_1IK$, 即 C, I, K 共线, 且 $\angle C_1KI=\angle CPI=135^\circ$.

同理, C, I, L 共线, 且 $\angle C_1LI=45^\circ$. 设 C_1 关于 CI 的对称点为 T, 则 C_1KTL 为正方形. 下证: $\triangle A_1EI$, $\triangle B_1FI$, $\triangle C_1KL$ 的外接圆均过点 T.

由 C_1KTL 为正方形知, C_1, K, T, L 共圆. 注意到

$$\begin{aligned}\angle FB_1I&=\angle FB_1C_1+\angle IB_1C_1\\&=\angle CB_1C_1+\angle IB_1C_1\\&=90^\circ+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=90^\circ+A,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\angle TIB_1=\angle CIT-\angle CIB_1&=\angle CIC_1-45^\circ\\&=360^\circ-\frac{1}{2}C-B-90^\circ-45^\circ\\&=180^\circ-B=90^\circ+A,\end{aligned}$$

故 $\angle FB_1I=\angle TIB_1$. 又

$$TI=C_1I=B_1I=CB_1=FB_1.$$

所以 FB_1IT 为等腰梯形. 因此, F, B_1, I, T 共圆.

同理, E, A_1, I, T 共圆.

证毕. □

评注 这是一道不太难的几何题, 但其证明共圆的方式比较特殊, 利用了正方形及等腰梯形, 值得注意.

2. 设整数 $N \geq 2$, 数列 $a = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N)$, $b = (b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N)$ 中各项均为非负整数. 对每个整数 $i \notin \{1,\ \cdots,\ N\}$, 取 $k \in \{1,\ \cdots,\ N\}$ 满足 $i-k$ 被 N 整除, 令 $a_i = a_k$, $b_i = b_k$.

我们称 a 是 $b-$调和的, 如果对于每个整数 i, 均有 a_i 等于以下算术平均:

$$a_i = \frac{1}{2b_i+1}\sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

现在假设 a 与 b 均不为常数数列, 且 a 是 $b-$调和的, b 是 $a-$调和的. 证明: $a_1,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ \cdots,\ b_N$ 中至少有 $N+1$ 项等于零.

证明 我们先证明: $\forall\, i \in \mathbb{Z},\ a_i,\ b_i$ 中必有 0. $(*)$

否则, 可考虑非空集合 $\{a_i,\ b_i |\ i \in \mathbb{Z},\ a_i \neq 0$ 且 $b_i \neq 0\}$ 的最大值, 记为 M. 不妨设 $a_k = M,\ b_k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

若存在 $-b_k \leq s \leq b_k$ 使 $a_{k+s} > a_k$, 则由 M 的最大性知 $b_{k+s} = 0$. 于是

$$\sum_{t=-a_{k+s}}^{a_{k+s}} b_{k+s+t} = 0,$$

即对 $\forall -a_{k+s} \leq t \leq a_{k+s}$, 有 $b_{k+s+t} = 0$. 而

$$|s| \leq b_k \leq M < a_{k+s},$$

故在上式中取 $t = -s$, 可得 $b_k = 0$, 这与 $b_k \neq 0$ 矛盾.

因此, 对 $\forall -b_k \leq s \leq b_k$, 有 $a_{k+s} \leq a_k$. 结合

$$a_k = \frac{1}{2b_k+1}\sum_{s=-b_k}^{b_k} a_{k+s}$$

立得对 $\forall\ -b_k \leq s \leq b_k$, 有 $a_{k+s} = a_k$.

若存在 $-b_k \leq s \leq b_k$ 使 $b_{k+s} = 0$, 则有

$$\sum_{t=-a_{k+s}}^{a_{k+s}} b_{k+s+t} = 0,$$

得对 $\forall -a_{k+s} \leq t \leq a_{k+s}$, 有 $b_{k+s+t} = 0$. 注意到

$$|s| \leq b_k \leq M = a_{k+s},$$

故在上式中取 $t = -s$, 可得 $b_k = 0$ 与 $b_k \neq 0$ 矛盾.

至此, 我们证明了: $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, 若 $a_k = M$ 且 $b_k \neq 0$, 则 $a_{k+1} = M$ 且 $b_{k+1} \neq 0$.

由此结合简单的归纳法即知 $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ a_k = M$ 且 $b_k \neq 0$, 这与 a 不为常数数列矛盾. 因此, $\forall\, i \in \mathbb{Z},\ a_i,\ b_i$ 中必有 0.

再证明: 存在 $i \in \mathbb{Z}$, 使 $a_i = b_i = 0$. $(**)$

因为 $(*)$ 及 $a,\ b$ 均不为常数数列, 所以存在 $i \in \mathbb{Z}$ 使得 $a_i = b_{i+1} = 0$. 此时,

假设 $a_{i+1} \neq 0$ 且 $b_i \neq 0$, 则

$$0 = a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s} \geq \frac{a_{i+1}}{2b_i + 1} > 0,$$

矛盾. 故 a_{i+1}, b_i 中有 0. 从而 $(**)$ 成立.

由 $(*)$ 与 $(**)$, 立即得到 $a_1, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_N$ 中至少 $N+1$ 项为 0. $\square$

评注 这是一道简单题, 只需要采用极端原理再根据大小关系去分析. 顺带一提, 对 $(**)$ 稍加改进马上可以得到本题最佳的界为 $N+2$.

3. 设整数 $n \geq 3$. 一个国家有 n 座机场, 且有 n 家执行双向航班的航空公司. 对每家航空公司, 都存在一个奇数 $m \geq 3$ 及 m 座不同的机场 $C_1, C_2, \cdots, C_m$, 满足: 这家航空公司所执行的全部航班恰是 C_1 与 C_2 之间, C_2 与 C_3 之间, $\cdots$, C_{m-1} 与 C_m 之间, C_m 与 C_1 之间的那些双向航班. 证明: 存在一条由奇数趟航班组成的封闭路线, 其中不同的航班由不同的航空公司执行.

证明 我们将问题转化为图论语言:

考虑 n 个点间的 n 个奇圈(不必不同), 证明: 可以从其中若干个圈中各取一条边, 使得取出的边也构成一个奇圈.

我们取出若干条来自互不相同的奇圈的边, 构成图 G, 满足 G 中无圈(包括无重边). 考虑上述取法中使 G 所含连通分支数最少的取法.

此时 G 中至多 $n-1$ 条边, 因此必有某个奇圈的边不在 G 中出现, 记此圈为 A. 则对 A 的每条边的两个顶点, 它们必在 G 的同一个连通分支内. 否则, 将此边添入 G 后, G 中仍无圈, 且连通分支个数减少, 与 G 的定义矛盾.

于是, 圈 A 的所有顶点均在 G 的同一连通分支内, 此连通分支为一棵树, 记为 T.

任取 T 中一点 w. 对 T 中任意两顶点 u, v, 记 $d(u, v)$ 为 u 与 v 在 T 中的距离, 则易知

$$d(u, v) \equiv d(u, w) + d(v, w) \pmod 2.$$

因为 A 为一个圈, 所以

$$\sum_{e_{uv} \in A} d(u, v) \equiv \sum_{e_{uv} \in A} (d(u, w) + d(v, w)) \equiv 0 \pmod 2.$$

其中, $\sum\limits_{e_{uv} \in A}$ 指对 A 中所有边求和, e_{uv} 为 u, v 间的边. 注意到 A 的边数为奇数, 故存在 $e_{uv} \in A$ 使 $2 \mid d(u, v)$. 考虑由 e_{uv} 及 u 到 v 在 T 中的路径围成的圈, 其长度为 $d(u, v) + 1$ 为奇数. 于是, 找到了一个由不同圈的边构成的奇圈. $\square$

评注 此题寻找圈的想法是在生成树上加边, 这是一个十分常用的手法. 值得一提的是, 2019 年大师杯的第 3 题也可以基于此想法做.

4. 用 $\mathbb{N}^*$ 表示所有正整数的集合. 我们称 $\mathbb{N}^*$ 的一个子集 A 为"无和集", 如果对 A 中的任意两个(可能相同的)元素 x, y, 它们的和 $x+y$ 不在 A 中.

求所有把无和集映到无和集的满射函数 $f:\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, 即对任意无和集 A, 它的像 $\{f(a)|a \in A\}$ 也是无和集.

注: 一个函数 $f:\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 称为满射, 如果对于每个整数 n, 都存在一个正整数 m 使得 $f(m)=n$.

解 所求 f 为 $f(x)=x(x \in \mathbb{N}^*)$.

我们先证明: $\forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ f(2a)=2f(a)$.

任取 $a \in \mathbb{N}^*$. 因为 f 为满射, 所以存在 $b \in \mathbb{N}^*$ 使 $f(b)=2f(a)$. 注意到 $\{f(a),\ f(b)\}$ 不为无和集. 于是, 必有 $b=\frac{a}{2}$ 或 $b=2a$ 之一成立. 我们对 a 所含 2 的幂次 α 用数学归纳法, 证明: $f(2a)=2f(a)$.

当 $\alpha=0$ 即 a 为奇数时, 满足 $f(b)=2f(a)$ 的 b 只能为 $2a$, 即 $f(2a)=2f(a)$. 假设结论对 $\alpha-1(\alpha \in \mathbb{N}^*$ 成立). 下面考虑 α 的情形.

对 $\frac{a}{2}$, 其所含 2 的幂次为 $\alpha-1$, 故由归纳假设, 有 $f(a)=2f\left(\frac{a}{2}\right)$. 又 $f(2a)=2f(a)$ 与 $f\left(\frac{a}{2}\right)=2f(a)$ 中至少一者成立, 因此只能为 $f(2a)=2f(a)$.

于是, 我们证明了 $\forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ f(2a)=2f(a)$.

再证: f 为单射.

否则, 假设存在 $a,\ b \in \mathbb{N}^*,\ a<b$ 使 $f(a)=f(b)$, 则 $\{a,\ 2b\}$ 为无和集且 $\{f(a),\ f(2b)\}$ 不为无和集, 矛盾.

接着证: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)=nf(1)$.

因为 f 为双射, 故可设 $c \in \mathbb{N}^*$ 使 $f(c)=nf(1)$. 任取 $s \in \mathbb{N}^*,\ s>\max\limits_{1 \le t \le 2c} f(t)$, 对 $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$, 若 $f(a) \ge s$, 则 $a>2c$.

对 $\forall\, 0 \le i \le n$, 设 $u_i \in \mathbb{N}^*$ 使 $f(u_i)=s+i \cdot f(1)$. 于是, 对 $\forall\, 0 \le i \le n-1$, 因为 $\{f(1),\ f(u_i),\ f(u_{i+1})\}$ 不为无和集, 所以 $\{1,\ u_i,\ u_{i+1}\}$ 不为无和集.

若 $u_{i+1}=2u_i$, 则

$$f(1)+f(u_i)=f(u_{i+1})=2f(u_i),$$

得 $u_i=1$, 矛盾. 若 $u_i=2u_{i+1}$, 则

$$f(u_i)>f(u_{i+1})>f(u_i),$$

矛盾. 于是, 必有 $u_{i+1}-u_i=\pm1$.

又 $\forall\, 0\le i\le n-2$, 由 $f(u_i)\ne f(u_{i+2})$ 知 $u_i\ne u_{i+2}$. 从而, 有

$$u_{i+1}-u_i=u_{i+2}-u_{i+1}.$$

因此, $u_{i+1}-u_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ 全为 1 或全为 -1. 于是, $u_n-u_0=\pm n$.

因为 $\{f(c),\ f(u_0),\ f(u_n)\}$ 不为无和集, 所以 $\{c,\ u_0,\ u_n\}$ 不为无和集. 由

$$f(u_n)>f(u_0)\ge s$$

知 $u_0,\ u_n>2c$. 若 $u_n=2u_0$, 则

$$f(c)+f(u_0)=f(u_n)=2f(u_0),$$

得 $c=u_0$, 矛盾. 若 $u_0=2u_n$, 则

$$f(u_0)>f(u_n)>f(u_0),$$

矛盾. 于是, 必有 $u_n-u_0=\pm c$.

因此, $c=n$. 即 $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)=nf(1)$. 最后, 结合 f 为满射立知 $f(n)=n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. 容易验证, 上述 f 满足要求.

因此, 所求 f 为 $f(x)=x(x\in\mathbb{N}^*)$. □

评注 这是一道简单的函数方程, 从尽量简单 (二元, 三元) 的无和集入手即可比较容易地做出.

5. 在 $xy-$ 坐标平面中, 横纵坐标都为整数的点称为格点, 所有顶点均为格点的多边形称为"格点多边形".

令 Γ 为一个凸的格点多边形. 证明: 可将 Γ 置于另一个凸的格点多边形 Ω 内, 使得所有 Γ 的顶点都落在 Ω 的边界上, 并且 Ω 恰有一个顶点不是 Γ 的顶点.

证明 我们先证明: 若格点三角形 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{1}{2}$, 则对任意格点向量(即横纵分量均为整数的分量)均可表示为 $k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}\ (k,\ l\in\mathbb{Z})$ 的形式. $(*)$

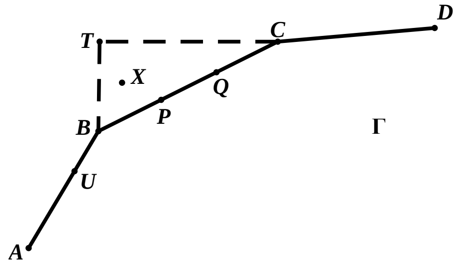
取点 D 使 $ABDC$ 为平行四边形. 由 Pick 定理知平行四边形 $ABCD$ 除四个顶点外不含别的格点, 即 $\forall\, u,\ v\in[0,\ 1),\ u,\ v$ 不全为 0, 均有 $u\cdot\overrightarrow{AB}+v\cdot\overrightarrow{AC}$ 不为格点向量. 再取 $\forall\, p,\ q\in\mathbb{Z}$, 可知 $(p+u)\cdot\overrightarrow{AB}+(q+v)\cdot\overrightarrow{AC}$ 也不为格点向量. 于是, $\forall\, k,\ l\in\mathbb{R},\ k,\ l$ 不全为整数, 必有 $k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}$ 不为格点向量. 又任意格点向量必能化为 $k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}\ (k,\ l\in\mathbb{R})$ 形式. 故其中的 $k,\ l\in\mathbb{Z}$, $(*)$ 获证.

回到原题: 对 Γ 的每条边, 此边上的所有格点将该边分为长度相等的若干段, 称分成的这些线段为此边的基本线段, 每条基本线段的长度为此边的基本长

度. 考虑 Γ 的基本长度最长的边, 设为 BC.

若 BC 水平或垂直, 则易知 Γ 只有水平与垂直的边, 故 Γ 为矩形, 此时结论显然成立.

下考虑 BC 不为水平及垂直的的情况, 不妨设如图所示, 并设 BC 两邻边分别为 AB, CD. 如图, 可取格点 T 使 BT 垂直, CT 水平.



将 $\triangle BCT$ 用其所含的格点进行三角剖分, 直到不能再分为止, 则这些小三角形均不含除了顶点的其他格点, 从而由 Pick 定理知它们的面积均为 $\frac{1}{2}$.

设 BP, CQ 为 BC 边上的基本线段. 设上述三角剖分中以 BP 为边的小三角形为 $\triangle BPX$, 则 $\triangle BPX$, $\triangle CQX$ 面积均为 $\frac{1}{2}$.

若 X 与 Γ 在直线 AB 两侧. 设 BU 为 AB 边上的基本线段.

因为 $\triangle BXP$ 面积为 $\frac{1}{2}$, 所以由 $(*)$ 知存在 $k,\ l \in \mathbb{Z}$ 使

$$\overrightarrow{UB} = k\cdot \overrightarrow{BX} + l\cdot \overrightarrow{BP}.$$

因为 $X,\ P$ 在 AB 两侧且 $\angle PBX$ 为锐角, 所以 $k,\ l \in \mathbb{N}^*$. 于是,

$$|\overrightarrow{UB}| = |k\cdot \overrightarrow{BX} + l\cdot \overrightarrow{BP}| > k|\overrightarrow{BP}| \geq |\overrightarrow{BP}|,$$

这与 BC 为基本长度最长的边矛盾.

于是 X 与 Γ 在直线 AB 同侧, 同理 X 与 Γ 在直线 CD 同侧. 此时, 取 Ω 为 X 与 Γ 的凸包, 易知其满足要求. □

评注 这是一道十分困难的题. 有关格点的题较少见导致不太容易找到合适的方法利用好格点. 证明中的 $(*)$ 尤为关键, 起到了从图形往代数关系转化的作用.

6. 对每个整数 $n \geq 2$. 记 $F(n)$ 为 n 最大的素因子. 一个“奇异对”是一对不同的素数 p 和 q, 使得没有整数 $n \geq 2$ 满足 $F(n)F(n+1) = pq$. 证明: 存在无穷多对奇异对.

证明 对奇素数 p, 称满足 $2^s \equiv 1 \pmod p$ 的最小正整数为 2 模 p 的阶, 记

为 $r(p)$.

若存在两不同奇素数 $p_1 < p_2$, 使得 $r(p_1) = r(p_2)$, 我们证明: $(2,\ p_1)$ 为奇异对. $(*)$

记 $r = r(p_1) = r(p_2)$. 假设存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使

$$F(n)F(n+1) = 2p_1,$$

则必有 $F(n)$, $F(n+1)$ 一个为 2, 一个为 p. 于是, 存在 $\alpha \in \mathbb{N}^*$, 使 $F\left(2^\alpha + 1\right) = p_1$ 或 $F\left(2^\alpha - 1\right) = p_1$.

若 $F\left(2^\alpha + 1\right) = p_1$, 则 $2^\alpha \equiv -1 \pmod{p_1}$. 由此可知 $2 \mid r$ 且 α 为 $\frac{r}{2}$ 的奇数倍. 从而 $2^\alpha \equiv -1 \pmod{p_2}$, 即 $p_2 \mid 2^\alpha + 1$. 于是,

$$F\left(2^\alpha + 1\right) \geq p_2 > p_1,$$

与 $F\left(2^\alpha + 1\right) = p_1$ 矛盾.

若 $F\left(2^\alpha - 1\right) = p_1$, 则 $2^\alpha \equiv 1 \pmod{p_1}$. 由此可知 $r \mid \alpha$. 从而 $2^\alpha \equiv 1 \pmod{p_2}$, 即 $p_2 \mid 2^\alpha - 1$. 于是,

$$F\left(2^\alpha - 1\right) \geq p_2 > p_1,$$

与 $F\left(2^\alpha - 1\right) = p_1$ 矛盾.

于是, $(*)$ 获证.

我们再证明: 对任意素数 $q > 5$, 存在两个不同素数, 满足 2 模它们的阶均为 $4q$. $(**)$

任取 $2^{2q} + 1$ 的一个大于 5 的素因子 p. 设 $r(p) = r$, 则由 $2^{2q} \equiv -1 \pmod{p}$ 知 $2 \mid r$ 且 $2q$ 为 $\frac{r}{2}$ 的奇数倍. 故 $r = 4$ 或者 $4q$. 若 $r = 4$, 则 $p \mid 2^4 - 1$ 与 $p > 5$ 为素数矛盾. 因此 $r(p) = 4q$.

于是, 只需证明 $2^{2q} + 1$ 有两个不同的大于 5 的素因子. 注意到

$$2^{2q} + 1 = (4+1)\left(4^{q-1} - 4^{q-2} + \cdots - 4 + 1\right),$$

且其中

$$4^{q-1} - 4^{q-2} + \cdots - 4 + 1 \equiv q \cdot 1 \not\equiv 0 \pmod{5},$$

所以 $2^{2q} + 1$ 所含 5 的幂次至多为 1. 显然

$$3 \nmid 2^{2q} + 1,\ 2 \nmid 2^{2q} + 1.$$

又

$$2^{2q} + 1 = 2^{2q} + 2^{q+1} + 1 - 2^{q+1} = (2^q + 2^{\frac{q+1}{2}} + 1)(2^q - 2^{\frac{q+1}{2}} + 1),$$

其中

$$2^q+2^{\frac{q+1}{2}}+1>2^q-2^{\frac{q+1}{2}}+1>5$$

且

$$\gcd\left(2^q+2^{\frac{q+1}{2}}+1,\ 2^q-2^{\frac{q+1}{2}}+1\right)=\gcd(2^q+2^{\frac{q+1}{2}}+1,\ 2^{\frac{q+3}{2}})=1,$$

所以 $2^{2q}+1$ 必有两个不同的大于 5 的素因子.

至此, $(**)$ 获证.

由 $(*)$ 及 $(**)$ 立得所证结论成立. $\square$

评注 这是一道十分有难度的数论题. 解答并不复杂, 其中的 $(*)$ 也是自然的. 但核心难点在于 $(*)$ 的作用太强, 反而会产生很多有希望的方向, 容易让人陷进去. 这是一道十分有价值的训练题.

总评 此次大师杯的第 1, 2, 4 题均属于中档偏简单题. 第 3 题利用了生成树的想法, 第 5 题则需要对格点有一定的了解, 第 6 题入手不难, 难在之后方向的选取. 总体来说, 这套题目难度较大, 3, 5, 6 三道题中解出一道就具有一定的竞争力.