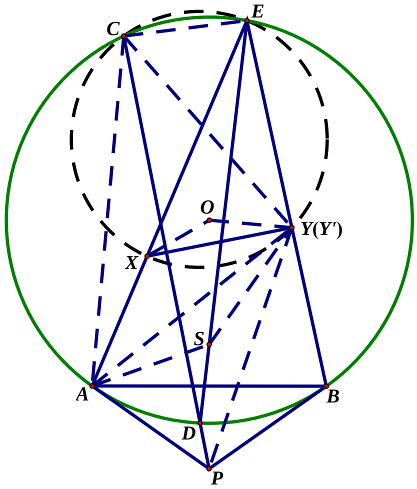
第三十四期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题 已知 PA, PB 分别切圆 Γ 于点 A, B. C 是圆 Γ 上一点, 且与 P 在直线 AB 异侧, PC 交圆 Γ 于另一点 D. 令 S 是 $\triangle PAB$ 外心, 直线 DS 交圆于另一点 E, PC 的中垂线分别交 AE, BE 于 X, Y. 求证: C, X, Y, E 四点共圆.

(湖南师大附中 苏林 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):



设 $\triangle PAC$ 的外心为 Y'. 则 $Y'S$ 是 PA 的中垂线, 所以

$$\angle AY'S = \frac{1}{2}\angle AY'P = \angle ACP = \angle ACD = \angle AES,$$

于是 A, E, Y', S 四点共圆. 因此

$$\begin{aligned}\angle AEY' &= 180^\circ - \angle ASY' = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - \angle ASP)\\ &= \frac{1}{2}\angle ASP = \frac{1}{4}\angle ASB = \frac{1}{4}(360^\circ - 2\angle APB)\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle APB = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle AEB)\\ &= \angle AEB.\end{aligned}$$

所以 Y' 在 EB 上, 又 Y' 在 PC 的中垂线上, 从而 $Y = Y'$.

于是

$$\angle CYX = \frac{1}{2}\angle CYP = 180^\circ - \angle CAP,$$

而 PA 是切线, 则

$$\angle CEX = \angle CEA = 180^\circ - \angle CAP = \angle CYX,$$

所以 C, X, Y, E 四点共圆, 命题获证. □

评注 石家庄二中贾镐铮, 安徽省安庆市第一中学叶龙翔, 清华大学严君啸, 山东省实验中学孙永喆, 济南市历城二中王代杰, 山大附中王子彧和杭州十四中印展宽等同学以及长郡中学团队给出了本题的正确解答.

第二题 *给定不小于 4 的偶数 n, 将 $n\times n$ 方格表中的方格黑白相间染色. 每次可任意选择一个 2×3 或 3×2 子方格表, 并将每格的颜色染为相反的颜色. 问: 是否可以经过有限次操作将所有方格染为一种颜色?*

(北京大学学生 *池卓倪* 重庆一中学生 *赵维捷* 供题)

解 (**根据清华大学孙孟越同学的解答整理**):

答案为 n 是 6 的倍数时.

一方面, 只需对 $n=6$ 进行构造. 为此注意到一个 3×3 的黑白相间的方格表(中心为黑)可以通过四次操作变为全黑. 这四次操作分别是上边的 2×3, 右边的 3×2, 下边的 2×3 以及上边 2×3. 通过对 6×6 方格表的四个 3×3 子表分别进行这四次操作, 我们可以得到左上与右下的 3×3 全黑, 而右上与左下全白. 之后对于上面三行里的 3×2 进行反复操作, 可以使得右上 3×3 变为黑色, 而左上 3×3 为白. 此时整个方格表里前三列为白, 后三列为黑. 最后对后三列里的三个 2×3 各进行一次操作, 即得到全白的方格表.

另一方面, 我们证明 $n\equiv 2,4 \pmod 6$ 不行. 为此将方格表标记为 $\{(i,j)\mid 1\le i,j\le n\}$, 且不妨设 $(1,1)$ 是黑色的. 对 $k\in\{1,2,3\}$, 令 S_k 为满足 $i+j\equiv k \pmod 3$ 中白色格子的数量. 注意到每次操作 S_k 的变化量为 $0,\pm 2$, 故 S_k 的奇偶性不变. 开始的时候, 方格表黑白相间且左上角为黑, 故每条白色的反对角线上有偶数个格子, 且他们都属于同一个 S_k. 因此一开始 S_1,S_2,S_3 都是偶数. 最后如果方格表全白, 则当 $n\equiv 2 \pmod 6$ 时 S_1,S_2 为奇数, 而当 $n\equiv 4 \pmod 6$ 时 S_1,S_3 为奇数, 都将导致矛盾. 这样我们就证明了如果左上角为黑, 且 $n\equiv 2,4 \pmod 6$, 则最后只可能全黑. 然而 n 是偶数, 故左上角为黑时右上角为白, 因此通过类似的考虑可以证明最后只可能全白. 所以 $n\equiv 2,4 \pmod 6$ 不行, 命题得

证! $\square$

评注 山西省长治市第二中学任炫智, 济南市历城二中欧瑜, 山大附中王子彧, 石家庄二中贾镐铮和杭州十四中印展宽等同学以及长郡中学团队也给出了本题的正确解答.

第三题 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为满足 $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$ 的正实数. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k}-1)^n} \geq \frac{a_1 \cdots a_n}{(a_1 \cdots a_n - 1)^n}.$$

(杭州二中学生 刘浩宇 供题)

证明 (根据石家庄二中贾镐铮同学的解答整理):

显然每个 $a_k > 1$. 令 $b_k = a_k^{a_k} - 1$, 则b_k是正数. 由 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$ 以及加权平均不等式, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k}-1)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \cdot \frac{a_k^{a_k}}{(a_k^{a_k}-1)^n} \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(a_k^{a_k}-1)^{\frac{n}{a_k}}}.$$

另一方面, 由赫尔德不等式,

$$\prod_{k=1}^{n} (b_k+1)^{\frac{1}{a_k}} \geq \prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{a_k}} + 1.$$

由于 $b_k = a_k^{a_k} - 1$, 化简为

$$\prod_{k=1}^{n} a_k - 1 \geq \prod_{k=1}^{n} (a_k^{a_k}-1)^{\frac{1}{a_k}}.$$

取倒数, 再 n 次方, 得到

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(a_k^{a_k}-1)^{\frac{n}{a_k}}} \geq \frac{1}{(a_1 a_2 \cdots a_n - 1)^n}.$$

于是由上面第一个不等式,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k}-1)^n} \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(a_k^{a_k}-1)^{\frac{n}{a_k}}} \geq \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n - 1)^n}.$$

命题得证! $\square$

评注 安徽省安庆市第一中学叶龙翔, 石家庄二中贾镐铮和杭州十四中印展宽等同学以及长郡中学团队也给出了本题的正确解答.

第四题 是否存在非零整数 a, b, c, 使得 $3a^4 + 4b^4 = 19c^4$?

(哥伦比亚大学 牟晓生 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

由于方程是齐次的故不妨设 $(a,b,c)=1$. 由此可知 a,b 不是 19 的倍数, a,c 均为奇数, 且 b,c 不是 3 的倍数. 然后将等式变形为

$$(3a^2+8b^2+19c^2)(3a^2-8b^2+19c^2)=57(a^2+c^2)^2.$$

我们证明 $3a^2+8b^2+19c^2$ 与 $3a^2-8b^2+19c^2$ 的最大公约数为 2. 事实上, 若奇素数 p 整除这两个数, 则 p 整除 $3a^2+19c^2$ 以及上面等式右边的 $57(a^2+c^2)^2$. 由之前的假设, p 不是 3 或 19, 于是 $p \mid a^2+c^2$. 结合 $p \mid 3a^2+19c^2$ 导出 $p \mid (a,c)$, 进而 $p \mid b$, 矛盾!

另外由二次剩余易知 $3a^2+8b^2+19c^2$ 不是 19 的倍数, 而 $3a^2-8b^2+19c^2$ 不是 3 的倍数. 所以上面的等式导出

$$3a^2+8b^2+19c^2=6u^2, \quad 3a^2-8b^2+19c^2=38v^2, \quad a^2+c^2=2uv.$$

由前两个式子得到 $3a^2+19c^2=3u^2+19v^2$, 于是

$$3(u-v)^2=3u^2+19v^2-6uv-16v^2=3a^2+19c^2-3a^2-3c^2-16v^2=16(c^2-v^2).$$

由于 c 和 v 都是奇数, $8 \mid c^2-v^2$, 所以我们有 $16 \mid u-v$. 于是 $3u^2-19v^2=3(u^2-v^2)-16v^2 \equiv 16 \pmod{32}$. 然而根据上面的推理,

$$3u^2-19v^2=8b^2 \equiv 0,8 \pmod{32},$$

导出矛盾! □

评注 (1). 山大附中王子彧同学通过分析 $4b^4-16c^4=3c^4-3a^4$ 也给出了本题的正确解答.

(2). 可以证明 $3a^4+4b^4 \equiv 19c^4 \pmod{n}$ 对每个正整数 $n>1$ 都有非平凡的解. 所以本题的结论说明对于二次型成立的 Hasse-Minkowski 原理不能推广到一般的高次方程.