2020 年日本数学奥林匹克决赛试题解析

彭熹
(湖南省长沙市雅礼中学, 410007)

日本 2020 年数学奥林匹克决赛试题, 在延续往年该项赛事试题风格稳健的传统的同时, 适当提升了整体难度. 这套题目难度逐题上升: 第 1 题和第 2 题属于容易题, 第 3 题属于中档难度题, 第 4 题及第 5 题为比较困难的问题. 第 4 题相当于 CMO 中二、五的难度, 第 5 题相当于 CMO 中三、六的难度.

I. 试 题

1. 求所有的正整数对 $(m,\ n)$, 使得 $\frac{n^2+1}{2m}$, $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ 均为整数.

2. 在三角形 ABC 中, $BC < AB$, $BC < AC$. 线段 AB 上一点 D 和线段 AC 上一点 E 满足 $BD = CE = BC$. 直线 BE 与 CD 交于点 P, 三角形 ABE 的外接圆与三角形 ACD 的外接圆再次交于点 Q. 求证: $PQ \perp BC$.

3. 求所有的函数 $f:\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, 使得对所有的正整数 $m,\ n$, 均有

$$m^2 + f(n)^2 + (m - f(n))^2 \geq f(m)^2 + n^2$$

成立.

4. 设整数 $n \geq 2$, 在圆周上有 $3n$ 个不同的点, 神算子与智多星对它们进行如下操作: 首先, 神算子任选其间没有连线段的两点用一条线段连接起来, 随后, 智多星任选一个没有放置过棋子的点, 在上面放一个棋子, 以上记为一个回合. 请证明: 无论智多星怎么操作, 神算子可以保证, 在 n 回合之后, 恰有一端有棋子的线段的条数不小于 $\frac{n-1}{6}$.

5. 求所有的正整数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 使得存在常数 c, 对 $\forall m,\ n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\gcd\left(a_m + n,\ a_n + m\right) > c\left(m + n\right).$$

修订日期: 2020-02-25.

Ⅱ. 解 答

题 1 求所有的正整数对 $(m,\ n)$, 使得 $\frac{n^2+1}{2m}$, $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ 均为整数.

解 由于 $\frac{n^2+1}{2m}\in\mathbb{Z}$, 知 $2\mid n^2+1$, 所以 n 为奇数.

设 $n=2k+1(k\in\mathbb{N})$, 注意到 $\sqrt{2^{2k}+m+4}\in\mathbb{Z}$, 所以

$$2^{2k}+m+4\geq\left(2^k+1\right)^2,$$

即 $m+4\geq 2^{k+1}+1$. 而 $2m\leq(2k+1)^2+1$, 即 $m\leq 2k^2+2k+1$, 所以

$$2k^2+2k+4\geq 2^{k+1}.$$

下面用数学归纳法证明: 当 $k\geq 6$ 时有

$$2^{k+1}>2k^2+2k+4. \tag{$*$}$$

当 $k=6$ 时, $2^{k+1}=128>88=2k^2+2k+4$, 结论成立.

假设 $k=i\,(i\geq 6)$ 时命题成立, 当 $k=i+1$ 时

$$\begin{aligned}2^{i+2}&=2\cdot 2^{i+1}>2\cdot\left(2i^2+2i+4\right)\\&=4i^2+4i+8>2i^2+6i+8\\&=2(i+1)^2+2\,(i+1)+4\end{aligned}$$

成立.

故由归纳原理, 知($*$)对所有 $k\geq 6$ 成立. 所以 $k\leq 5$.

逐一讨论即知本题所求正整数解为: $(1,3)$, $(61,11)$. □

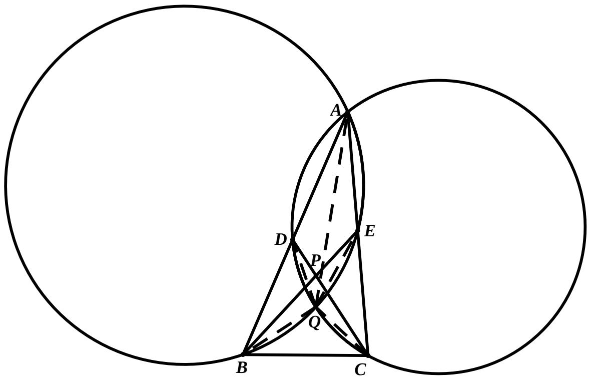
评注 本题是一道简单的数论问题. 由条件“$\frac{n^2+1}{2m}$ 为整数”得出 n 为奇数及 $2m\leq n^2+1$; 对于条件“$\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ 为整数”, 我们利用其代数性质, 由完全平方数的离散性进行不等式估计, 进而得出 n 的上界;最后处理平凡情况即可.

题 2 在 $\triangle ABC$ 中, $BC<AB$, $BC<AC$. 线段 AB 上一点 D 和线段 AC 上一点 E 满足 $BD=CE=BC$. 直线 BE 与 CD 交于点 P, $\triangle ABE$ 的外接圆与 $\triangle ACD$ 的外接圆再次交于点 Q. 求证: $PQ\perp BC$.

证明 连结 AQ, BQ, CQ, DQ, EQ. 由 $AQCD$, $ABQE$ 四点共圆, 知

$$\angle QEC=\angle QBD,\ \angle QDB=\angle QCA.$$

又因为 $BD=CE$, 所以 $\Delta QBD\cong\Delta QEC$. 于是 $QC=QD$. 又因为 $BC=BD$, 所以 $BQ\perp CD$. 同理可证 $CQ\perp BE$. 所以 Q 为 ΔBCP 的垂心, 于是 $PQ\perp BC$. □



评注 本题是一道简单的几何问题. 从发现点 Q 的性质入手: 它是 $\triangle ABC$ 的内心, 亦是完全四边形 $ADBPCE$ 的密克尔点. 这样一来后面的处理变得自然: 借助共圆得出角度相等, 继而得到相关三角形全等; 再运用全等将角关系转化为边关系; 最后完成点 Q 就是 $\triangle PBC$ 的垂心的证明.

题 3 求所有的函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$, 使得对所有的正整数 m, n, 均有

$$m^2+f(n)^2+(m-f(n))^2\geq f(m)^2+n^2 \tag{1}$$

成立.

解 1 (戴世捷) 所求为 $f(x)=x$. 记

$$f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right),\ f_1(x)=f(x)\left(n\geq 2,\ n\in\mathbb{Z}^+\right),$$

在 (1) 中取 $m=f(n)$, 得到: $2f(n)^2\geq f_2(n)^2+n^2$, 即

$$(f(n)-f_2(n))\cdot(f(n)+f_2(n))\geq(n-f(n))\cdot(n+f(n)) \tag{2}$$

若存在 $n\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $n>f(n)$, 则由 (2) 式可知 $f(n)>f_2(n)$. 以此类推可知存在 $i\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $f_i(n)>0\geq f_{i+1}(n)$, 与值域为正整数集矛盾. 故 $f(n)\geq n$ 对所有正整数 n 成立. 若 $f(n)-n>0$, 则

$$f_2(n)+f(n)>f(n)+n,$$

代入 (2) 式知

$$f_2(n)-f(n)<f(n)-n.$$

同理可知若 $f_{i+1}(n)-f_i(n)<0$, 则

$$f_{i+2}(n)-f_{i+1}(n)<f_{i+1}(n)-f_i(n).$$

结合 $f(n)\geq n$, 知此时必存在 $i\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $f_{i+1}(n)-f_i(n)=0$. 故一定存在正整

数 l 使得 $f(l)=l$.

再在上面的步骤中取 $n>l$, 知存在正整数 j 使得

$$f_{j+1}(n)=f_j(n)\geq n>l.$$

故存在无穷多个正整数 l 使得 $f(l)=l$.

此时只需说明若 $f(k)=k$, 则 $f(k-1)=k-1$, 就可以递推出 $f(x)=x$. 在 (1) 中取 $m=k-1,\ n=k$ 得

$$f(k-1)^2\leq(k-1)^2+1,$$

即 $f(k-1)\leq k-1$. 又由 $f(k-1)\geq k-1$, 故 $f(k-1)=k-1$. 所以 $f(x)=x$ 对任意正整数成立. □

解 2 (周煜林) 由上面的解法知 $f(n)\geq n$, 在 (1) 中取 $m=f(n)$, 得到

$$2f(n)^2\geq f_2(n)^2+n^2 \tag{3}$$

将 $f(n)\geq n$ 代入 (3) 式, 结合均值不等式得到

$$f(n)^2\geq\frac{n^2}{2}+\frac{f_2(n)^2}{2}\geq\left(\frac{n+f_2(n)}{2}\right)^2\Leftrightarrow f(n)-n\geq f_2(n)-f(n).$$

由于 $f(n)\geq n$, 所以

$$f(n)-n\geq f_2(n)-f(n)\geq\cdots\geq f_{i+1}(n)-f_i(n)\geq\cdots \tag{4}$$

故当 i 充分大时, 有

$$f_{i+1}(n)-f_i(n)=f_{i+2}(n)-f_{i+1}(n).$$

结合均值不等式的取等知

$$f_i(n)=f_{i+1}(n)=f_{i+2}(n)=\cdots$$

若 (4) 中存在不等号严格成立, 取出其中最大的 k 使

$$f_{k+1}(n)-f_k(n)>f_{k+2}(n)-f_{k+1}(n).$$

记 $f_k(n)=t$, 则

$$f(t)-t>f_2(t)-f(t)=0.$$

进而推出 $f(t)>t$.

在 (1) 式中取 $m=t,\ n=f(t)$, 结合 $f_2(t)=f(t)$, 得到

$$t^2+f(t)^2+(t-f(t))^2\geq 2f(t)^2.$$

进而推出 $f(t) \le t$. 得到矛盾!

故对于任意正整数 n, 有 $f(n)=n$. $\square$

评注 这是一道中等难度的代数题. 答案是容易猜到的. 法 1 和法 2 均进行了迭代, 构造一个无穷序列, 用 n 替换 $f(n)$, 这是解决这个题的关键. 后半部分的处理方法各有不同, 法 1 是类似于柯西归纳的方法(当然也可以直接从 k 推 $k+1$ 和 $k-1$); 而法 2 则是通过分析取等条件直接得到了解答. 本题的难点在于对非恒等条件的运用.

题 4 设整数 $n \ge 2$, 在圆周上有 $3n$ 个不同的点, 神算子与智多星对它们进行如下操作: 首先, 神算子任选其间没有连线段的两点用一条线段连接起来, 随后, 智多星任选一个没有放置过棋子的点, 在上面放一个棋子, 以上记为一个回合. 请证明: 无论智多星怎么操作, 神算子可以保证, 在 n 回合之后, 恰有一端有棋子的线段的条数不小于 $\frac{n-1}{6}$.

证明 1 (罗海纳, 李俊杰) 为了方便叙述, 我们定义: "影响"是指一个点被放了棋子或者有连出的线段;两条线段"互不干扰"当且仅当它们没有公共的未放置棋子的端点;一次"消除"是指将一条恰有一端有棋子的线段的另一端点放置一个棋子.

我们先解决当 $n=6k+2\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 时的情况, 再处理其他情况.

当 $n=6k+2\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 时, 神算子的策略是: 在前 $4k+1$ 个回合中连接 $4k+1$ 对两两没有公共点的点对, 由于智多星仅可放 $4k+1$ 个棋子, 此时会剩下若干个相连且均无棋子的点对, 设其有 x 个.

当 $x \le 2k$ 时, 我们设在第 $4k+1$ 个回合结束后, 共有 y 条恰有一端有棋子的线段, 共有 z 条两端均有棋子的线段, 那么有

$$\begin{cases} x+y+z=4k+1, \\ y+2z \le 4k+1, \end{cases}$$

于是 $y \ge 4k-2x+1$, 故此时至少会存在 $4k-2x+1$ 个恰有一端有棋子的线段.

当 $x>2k$ 时, 神算子可以舍弃大于 $2k+1$ 的那部分的两端均无棋子的线段, 将其当做 $x=2k+1$ 来处理. 故此时圆周上有 $x\,(x \le 2k)$ 个两端均无棋子的线段及 $4k-2x+1$ 个恰有一端有棋子的线段, 或 $2k+1$ 个两端均无棋子的线段(此时 $x=2k+1$).

接下来 x 个回合, 神算子任取一个有棋子的点, 将 x 个相连且均无棋子的点

对中的一点与这个有棋子的点相连.

(1)当 $x \leq 2k$ 时: 在这 x 个回合中, 智多星仅可放 x 个棋子, 而圆周上存在“互不干扰”的 x 个相连且均无棋子的点对与一个有棋子的点相连的三元组及 $4k-2x+1$ 个恰有一端有棋子的线段.

由于操作的先后不影响结果, 我们可以假设智多星在神算子操作完之后再操作. 此时对于智多星而言, 前者他必须用两个棋子才能“消除”所求线段, 而后者只需用一个棋子. 故他此时的最佳策略是先“消除”后者, 再“消除”前者.

倘若 $x < 4k-2x+1$, 即 $3x < 4k+1$ 时, 智多星未“消除”完后者, 此时剩下

$$x+4k-2x+1-x=4k-2x+1 \geq k+1$$

条所求线段.

倘若 $x \geq 4k-2x+1$, 即 $3x \geq 4k+1$ 时, 智多星“消除”完了后者, 此时剩下

$$x-\left[\frac{x-(4k-2x+1)}{2}\right]=x-\left[\frac{3x-1}{2}\right]+2k \geq k+1$$

条所求线段.

至此, 我们可知 $4k+1+x$ 个回合过后, 圆周上至少剩下 $k+1$ 条“互不干扰”的所求线段.

又因为智多星每回合“影响” 1 个点, 神算子每回合“影响” 2 个点, 而 $n+2n \leq 3n$. 所以神算子任何时刻总能找到一个没有被“影响”的点与一个有棋子的点连线, 新增加1 条所求线段.

而智多星每回合至多“消除”去掉 1 条所求线段, 于是, n 回合后所求线段条数 $\geq k+1$.

(2)当 $x=2k+1$ 时: 由于智多星需要 2 个棋子才可“消除”去掉 1 条所求线段, 所以 n 个回合后剩下的所求线段条数 $\geq 2k+1-\left[\frac{2k+1}{2}\right]=k+1$.

综合 (1)(2) 两种情况, $n=6k+2\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 的情况得证.

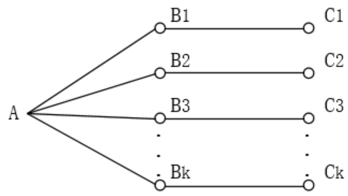
我们可以用同样的方法证明其他情况: 当 $n=6k+2+s$ 时(其中 $s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$), 前 $6k+2$ 个回合依照上述操作可得到至少 $k+1$ 条所求线段;后 s 个回合依照上述过程的后 $n-(4k+1+x)$ 个回合中的方法操作, 可得到 $6k+2+s$ 个回合后所求线段条数仍然至少为 $k+1$.

这样, 原命题得证. □

证明 2 (周煜林) 我们称神算子为甲, 智多星为乙, 恰一端有棋子的线段为“好的”. 先证明两个引理:

引理 1 考虑 $2k+1$ 个点: $A,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_k,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_k$, 且 B_i 同

时与 A, C_i 相连 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ (如下图所示). 若乙在 A 处放置了棋子, 在其余 $2k$ 个点中放置 s 个棋子, 则图中至少有 $k-\left[\frac{s}{2}\right]$ 条"好的"线段.



证明　注意到若存在 i 使 B_i 上无棋而 C_i 中有棋则将棋移至 B_i 上, 则在此图中"好的"线段条数减少 1. 现设线段 $B_iC_i\,(1\le i\le k)$ 中, 仅在 B_i 上有棋的有 x 条, 在 $B_i,\ C_i$ 上都有棋的有 y 条, $B_i,\ C_i$ 上均无棋的有 z 条, 则有

$$\begin{cases} x+y+z=k, \\ x+2y=s. \end{cases}$$

于是"好的"线段条数为

$$x+z=k-y\ge k-\left[\frac{s}{2}\right].$$

引理 1 得证.

引理 2　在某一时刻若已经出现了 m 条"好的"线段, 且这些线段没有放置棋的顶点互不相同, 则甲可以保证在游戏结束时仍有 m 条"好的"线段.

证明　注意到除第 n 个回合外, 每回合必然都会剩下未连边也无棋子的点, 故若乙在某条"好的"线段未放棋的顶点 X 放棋, 甲选择上面所说的任何一个顶点 Y 在 $X,\ Y$ 之间连边即可保证"好的"线段条数不减. 于是引理 2 得证.

回到原题. 记 $\left[\frac{n-1}{6}\right]=k+1$, 不妨设 $k\ge 1$ ($k<1$ 结论平凡).

甲按如下方式操作: 不断地连接两个无棋子且未放出边的点, 直至第 M 轮. 我们设此时图中已经出现了 t 条两个端点均无棋子的线段, u 条"好的"线段. 其中每产生一条"好的"线段至少需要"消耗"一个回合, 类似引理1的证明, 我们有

$$\frac{M-u}{2}\le t\le M,$$

注意到每一回合 M 与 t 的增加均至多为 1, 故存在 $t\in[n-M-1,\ n-M]$. 我们取最小的 t 使得它满足上式.

(1) 若 $t<2k$, 则有 $n-M-1<2k$. 此时甲选择一个已经放置了棋子的顶点 A, 将前 M 轮得到的 t 条两端无棋子的线段 B_iC_i 的顶点 B_i 与 A 相连.

如果 $t=n-M$, 则操作完后甲已无法操作, 此时乙一共又操作了 t 次. 由引理 1, 图中"好的"线段总数 $\ge u+t-\left[\frac{t}{2}\right]=u+\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil\ge\frac{n}{2}-t\ge k+1$.

如果 $t=n-M-1$, 则完成上述操作后甲再取一个未连边也无棋子的顶点 D 与 A 相连. 类似的, 图中“好的”线段总数 $\geq u+\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil \geq \frac{n}{2}-1-t \geq k+1$.

结论成立.

(2) 若 $t \geq 2k$, 我们选取某个最小的 M 使得 $t \geq 2k$. 则甲选择一个已经放置棋子的顶点 A, 将这 $2k$ 条两端棋子的线段 B_iC_i 的顶点 B_i 与 A 相连, 再选择一个未放置棋子的无线段的顶点 D 与 A 相连. 由引理 1, 图中“好的”线段数 $\geq 2k+1-\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil \geq k+1$, 接下来由引理 2, 结论成立.

综上, 命题得证. □

评注 这是一道较难的组合问题. 对于此类操作问题, 考虑一些性质良好的结构是常用方法, 例如法 1 中的三元组和恰有一端有棋子的线段, 法 2 中引理 1 的结构. 而这些结构的得出往往源于试探小情况, 研究特例. 之后便可以顺水推舟完成证明. 另外, 写好这道题的解答过程并不容易.

题 5. 求所有的正整数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 使得存在常数 c, 对 $\forall m,\ n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\gcd\left(a_m+n,\ a_n+m\right) > c\left(m+n\right).$$

解 (覃俊卓, 周煜林) 先证明一个引理.

引理 对 $\forall m \in \mathbb{N}^+$ 及素数 p, 存在常数 $C_{p,\,m}$ (与 p 有关)满足对 $\forall \alpha \geq \beta_p = \left\lceil \log_p \frac{2}{c}\right\rceil$ 且 $k \geq C_{p,\,m}$ 有 $p \mid a_{p^\alpha k-a_m}+m$.

证明 用反证法. 若结论不成立, 则取 $n=p^\alpha k-a_m$.

由条件知

$$\gcd\left(a_m+n,\ a_n+m\right)=\gcd\left(a_n+m,\ p^\alpha k\right) > c\left(m+n\right) > 2k-c\cdot a_m.$$

由于 $p \nmid a_n+m$, 所以

$$\gcd\left(a_m+n,\ a_n+m\right) \leq k,$$

故 $k > 2k-ca_m$, 这对于充分大的正整数 k 不成立. 故反设不成立. 引理得证.

回到原题. 记

$$S_1=\left\{p|p\text{为素数, 且}p \leq \frac{2}{c}\right\},\ S_2=\left\{p|p\text{为素数, 且}p > \frac{2}{c}\right\}.$$

(1) 我们先证 $|a_{m+1}-a_m|$ 有界.

若 $\exists p \in S_1$ 且

$$v_p\left(|a_{m+1}-a_m|\right) \geq \beta_p,$$

由引理知

$$p \mid a_{p^{\beta_p}k-a_m}+m$$

对任意充分大的 k 成立, 而

$$a_{p^{\beta_p}k-a_{m+1}}+m+1=a_{p^{\beta_p}l-a_m}+m+1$$

亦能被 p 整除, 这里 $l=k-\dfrac{a_{m+1}-a_m}{p^{\beta_p}}\in\mathbb{Z}^+$. 由上可知 $p\mid 1$, 矛盾！所以, $\forall p\in S_1$,

$$v_p\big(|a_{m+1}-a_m|\big)\le\beta_p-1.$$

若 $\exists p\in S_2$ 且 $p\mid(|a_{m+1}-a_m|)$, 与上类似可以得出矛盾.

所以, $\forall p\in S_2$, $p\nmid|a_{m+1}-a_m|$. 故

$$|a_{m+1}-a_m|\le\prod_{p\in S_1}p^{\beta_p-1}=M$$

有界.

(2) 再接下来证明: 对充分大的 m, 有 $a_{m+1}-a_m=1$.

若 $a_{m+1}-a_m\neq1$. 在题目条件中取 $n=m+1$, 有

$$\gcd\left(a_m+m+1,\ a_{m+1}+m\right)>c\left(2m+1\right),$$

即

$$\gcd\left(a_{m+1}-a_m-1,\ a_m+m+1\right)>c\left(2m+1\right).$$

故

$$M+1\ge|a_{m+1}-a_m-1|>\gcd\left(a_{m+1}-a_m-1,\ a_m+m+1\right)>c\left(2m+1\right).$$

而这当 m 充分大时不成立. 故对充分大的 m 有 $a_{m+1}-a_m=1$. 即 $a_m=m+t$ 对充分大的 m 均成立.

(3) 最后我们证明 $a_n=n+t$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 成立.

取 $m=q-a_n$, 其中 q 为足够大的素数, 则

$$\gcd\left(a_m+n,\ a_n+m\right)>1.$$

所以 $q\mid q+t+n-a_n$, 即 $q\mid n+t-a_n$ 对任意充分大的素数成立, 于是 $a_n=n+t\,(t\in\mathbb{Z})$. 若 $t<0$, 则当 $n=1$ 时即与题意矛盾, 故 $t\ge0$, 此时取 $c<1$ 即可.

综上, 可能的正整数数列为 $a_n=n+t\,(t\in\mathbb{N})$. □

评注 这是一道较难的数论问题. 首先容易猜到答案只可能是 $a_n = n + t$, 之后利用素数及素数幂将最大公约数化为整除性质, 并结合题中不等式条件转化为相邻两项之差的有界性, 最后通过代数手段求得目标序列.