数学新星问题征解

第三十六期 (2020.03)

主持: 牟晓生

第一题. 求所有的整数 α, 使得对任意正整数 n 以及任意乘积为 1 的正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{1 - a_i + a_i^2} \leq n.$$

另外求所有的整数 α 使得上面不等式的反方向永远成立.

(山大附中学生 王子彧 傅浩桐 供题)

第二题. 设 $\triangle ABC$ 的外心和内心分别为 O 和 I. 外接圆上弧 $\widehat{BAC}$ 的中点为 N_1, $\angle BAC$ 所对的旁切圆在 BC 上的切点为 D_1. 将 $\triangle AN_1D_1$ 的外接圆记为 Γ_1, 类似定义 Γ_2, Γ_3. 令 P 为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 这三个圆的根心, 求证 P 在直线 OI 上.

(人大附中学生 董天诺 供题)

第三题. 给定正整数 $n \geq 4$. 考虑所有和为 n 的非整数的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 求最优的常数 $C_1(n)$ 以及 $C_2(n)$, 使得下面不等式恒成立:

$$C_1(n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot \{x_i\}}{x_i + 1} \leq C_2(n),$$

其中 $\{x_i\}$ 为 x_i 的小数部分.

(湖南师大附中学生 夏阳 供题)

第四题. 正整数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{27}$ 满足这些数没有大于 1 的公因子, 且每个 x_i 均整除它们的和. 若 x_{27} 是一个素数, 求这个素数的所有可能值.

(吉林大学 苏绛航 供题)