序号函数

冯跃峰

对于离散点集问题, 一种常见的处理方式, 是对已知点适当编号, 然后借助代数手法, 发掘点集的性质.

一种常用的编号方式, 就是用相应的参数刻画点的位置, 使各点之间具有某种顺序. 我们称这样的编号为“序号”.

如果序号涉及 k 个参数, 则称之为 k 维序号, 记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 它类似于 k 维空间中点的坐标.

此外, 代数手法也是多种多样的, 本文介绍一种行之有效的处理方式: 引入序号函数.

所谓“序号函数”, 就是对 k 维序号 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 中的参数进行适当运算, 使每个点都对应一个数值, 记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$. 然后通过对其函数值 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 隐含性质或特征的发掘与研究, 找到解决问题的途径.

序号函数可以有效刻画点集特征, 从而方便我们对点集进行规划和安排. 下面举一个例子来说明.

问题 设 $X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}\}$ 是 n 维空间所有格点的集合, 对 X 中任意两个格点 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 定义它们的距离为: $|A - B| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$.

求 r 的最小值, 使得能将 X 中的点 $r-$染色, 分别满足以下要求:

(1) 任何两个同色的格点 A, B, 满足 $|A - B| \geq 2$;

(2) 任何两个同色的格点 A, B, 满足 $|A - B| \geq 3$. (原创题)

【题感】 从目标看, 本题属于“存在型”组合极值, 但条件不提供算法, 宜从等式入手: 构造一种色数尽可能少的染色, 由此猜出色数的最小值.

从规则看, 染色方法是由“距离”不等式 $|A - B| \geq 2$ 限定的. 而该不等式的反面容量远远小于正面容量 $\big([2, +\infty)$与 1 之间的显著差别$\big)$, 可采用补集思考:

修订日期: 2020-02-25.

只需适当染色, 使满足 $|A-B|=1$ 的任意两点 A, B 都异色. ——这可采用局部扩展策略.

从条件看, n 维空间过于抽象, 不妨从特例开始, 先考察 2 维空间的格点集合.

【研究特例】 (1) 先考虑 $n=2$ 的情形.

【局部扩展】 取点 A 为红色, 则由条件可知, A 的邻点都不是红色. 因为 A 的任何两个邻点的距离都是 2, 可采用最简单的构造: 将其邻点都染蓝色.

如此下去, 发现相间染色 (类似于国际象棋盘) 合乎要求.

【本质推广】 现在的问题是, 在 n 维空间中能否有类似的"相间染色", 使同色点 A, B 满足: $|A-B| \geq 2$?

"相间"是一种几何上的位置刻画: 在特定排序中间隔一个对象. 但对于高于 3 维的空间,"相间"没有确切的含义. 我们需要一种更广泛的本质描述, 以便推广到高维空间.

由此想到棋盘中奇偶格的定义: 当 $i+j$ 为奇 (偶) 时, 称格 a_{ij} 为奇 (偶) 格.

早在 1987 年 1 月, 笔者在《中等数学》上发表的"格阵"一文, 首次给出这一定义, 目的是想说明: 用格的"奇偶性"代替"黑白染色", 具有更广泛的意义. 但当时有人由于没有看清这一点, 对其做法不以为然, 讥讽为"故意将文章写得别人看不懂"——其实是他们不懂我的心, 我当然也就不以为意.

实际上, 格的奇偶性可以推广到任何高维空间, 也揭示了黑白相间染色的本质. 引入序号函数: 坐标分量之和, 则高维空间中相邻两点对应的函数值不同奇偶——这也是我编拟这道题的初衷.

【序号函数】 对于格点 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其所有邻点可表示为 $(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i \pm 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. 定义 $f(A)=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 为 A 的特征值, 则对任何相邻两点 A, B, 有 $f(A), f(B)$ 不同奇偶.

这样, 将特征值为奇数的点染红色, 特征值为偶数的点染蓝色, 则染色合乎要求. 问题 (1) 迎刃而解.

【新写】 (1) 首先, 因为所有点不全同色, 所以 $r \geq 2$.

其次, 当 $r=2$ 时, 对格点 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 称 $f(A)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 为 A 的特征值.

因为相邻两点 (距离为 1) 的坐标恰有一个分量相差 1, 其他分量都相同, 从而相邻点的特征值不同奇偶. 于是, 将特征值为奇数的点染红色, 特征值为偶数的点染蓝色, 则染色合乎要求.

实际上, 如果 A,B 同色, 则由染色规则知, 它们不相邻, 从而 $|A-B|\geq 2$.

综上所述, r 的最小值为 2. □

下面考虑 (2), 求 r 的最小值, 使任何两个同色的格点 A,B, 满足 $|A-B|\geq 3$.

【研究特例】 先考虑 $n=2$ 的情形.

【局部扩展】 取点 A 为 1 色, 则由条件可知, A 的邻点都不是 1 色. 而且 A 的 4 个邻点两两异色. 否则, 设 A 的两个邻点 B,C 同色,但 $|B-C|=2<3$, 矛盾. 由此可见, $r\geq 5$.

如果 $r=5$, 不妨设 A 的 4 个邻点分别为 2,3,4,5色, 这 5 个点形成一个以 A 为中心的"十字架".

如此下去, 发现染色使每个"十字架"中的点两两异色时合乎要求.

值得指出的是, 这并不是"染色方法", 仅仅是"目标要求", 因为它并没有告诉我们如何染色. 构造中务必注意: 不能用"目标要求"代替具体构造.

如何使每个"十字架"中的点两两异色? 关键是引入点的序号函数: 每个点都对应一个函数值, 使每个"十字架"的点对应函数值都属于不同类 (这当然需要函数值互异).

【以简驭繁】 先尝试最简单的函数: $f(x,y)=x+y$.

因为以 (x,y) 为中心的"十字架"的其他 4 个点为 $(x\pm 1,y)$, $(x,y\pm 1)$, 但由上述定义, 有

$$f(x+1,y)=x+y+1=f(x,y+1),$$

不合要求.

如何修改函数, 使 $(x+1,y)$ 与 $(x,y+1)$ 的函数值不同? ——这稍作改变, 将 y 的系数更改为 2 即可.

【改进函数】 令 $f(x,y)=x+2y$ 即可, 此时, 5 个特征值为:

$$f(x,y)=x+2y,\ f(x+1,y)=x+2y+1,\ f(x-1,y)=x+2y-1,$$

$$f(x,y+1)=x+2y+2,\ f(x,y-1)=x+2y-2,$$

它们构成模 5 的完系.

将特征值属于模 5 的同一个剩余类中点染同一种颜色, 可知 5 种颜色足够. 从而 r 的最小值为 5.

如何推广到 n 维空间?——希望找到一个类似的"十字架".

【发掘特征】 "十字架"的特征是 (不能迁移形状, 只能迁移特征): 一个点及其所有邻点构成的集合.

要学会用数学语言对有关形象进行描述, 它通常可一字不改地推广到高维空间。这是一种非常重要的基本功.

【特征迁移】 对 n 维空间, 考察任意一个点 A, 由 A 及其所有邻点构成的集合称为一个"群", 其中点 A 为该群的中心. 注意: 邻点的邻点不能归入同一个群.

【符号刻画】 对 $A \in X$, 称集合 $Q(A) = \{P \in X \mid |P - A| \leq 1\}$ 是以 A 为中心的一个群.

显然, 以 A 为中心的群中任何两点的距离不大于 2, 这是因为 P, Q 到 A 的距离都不大于 1.

【平凡估计】 对于点 $A_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它有 $2n$ 个邻点: $(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i \pm 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ $(1 \leq i \leq 2n)$, 若染色合乎要求, 则这 $2n+1$ 个点两两异色, 所以 $r \geq 2n+1$.

下面构造一种含有 $2n+1$ 种颜色的染色, 使任何两个同色点的距离不小于 3, 这只需将 2 维空间的序号函数迁移到 n 维空间即可.

【归纳通式】 将 2 维空间的序号函数 $f(x, y) = x + 2y$, 直接迁移到 n 维空间, 变为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$.

【染色方案】 每个"群"中所有点的特征值构成模 $2n+1$ 的完系, 将特征值模 $2n+1$ 同余的点染同一种颜色, 可知 $2n+1$ 种颜色足够, 从而 r 的最小值为 $2n+1$.

【新写】 (2) 对 $A \in X$, 称集合 $Q(A) = \{P \in X \mid |P - A| \leq 1\}$ 是以 A 为中心的一个群. 考察以 $A_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为中心的群, 它的另 $2n$ 个点为 $A_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i+1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$, $A_{n+i}(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i-1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ $(1 \leq i \leq n)$, 若染色合乎要求, 则这 $2n+1$ 个点两两异色.

实际上, 由 $|A_0 - A_i| = 1 < 3$ $(1 \leq i \leq 2n)$, 知 A_0 与 A_i 异色: 由 $|A_i - A_j| = 2 < 3$ $(1 \leq i < j \leq 2n)$, 知 A_i 与 A_j 异色. 所以 $r \geq 2n+1$.

当 $r = 2n+1$ 时, 对格点 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 称 $f(A) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$ 为 A 的特征值, 则以 A 为中心的群中各点的特征值分别为 $f(A)$, $f(A) \pm 1$, $f(A) \pm 2, \cdots, f(A) \pm n$, 它们构成模 $2n+1$ 的完系.

将特征值模 $2n+1$ 的余数为 i $(1 \leq i \leq 2n+1)$ 的点染第 i 种颜色, 则每一个群中没有同色点.

下面证明染色合乎要求. 实际上, 如果 $|A - B| \leq 2$, 则 A, B 或者相邻, 或者同为某个点的邻点. 从而 A, B 属于同一个群, 由染色规则知 A, B 异色.

由此可见, 若 A, B 同色, 则 $|A-B| \geq 3$, 所以 $r=2n+1$ 合乎条件.

综上所述, r 的最小值为 $2n+1$. □

遗留问题 (I) 求 r 的最小值, 对任何两个同色的格点 A, B, 有 $|A-B| \geq 4$.

(II) 我们还可进一步考虑, 求 r 的最小值, 对任何两个同色的格点 A, B, 有 $|A-B| \geq k$ (k 是给定的大于 1 的整数).

期待大家给出好的结果, 并欢迎交流与指正!