第 41 届环球城市数学竞赛秋季赛试题解析

王广廷

(上海市上海中学, 200231)

环球城市数学竞赛始于 1980 年的莫斯科-基辅-里加三市邀请赛, 现已成为一个有上百个城市参加的国际性比赛. 从 1982 年开始. 每届举行两季比赛: 秋季赛和春季赛. 每季分为初级 (O 水平) 和高级 (A 水平) 两轮, 其中 A 水平的部分问题题目新颖, 值得研究和欣赏. 我们选取了 2019 秋季赛 A 水平的 7 个问题给出了解答和评析.

I. 试 题

1. 多项式 $P(x,y)$ 满足: 对任意非负整数 n, $P(n,y)$ 和 $P(x,n)$ 中的每一个要么为零，要么为次数不超过 n 的多项式. 问: 多项式 $P(x,x)$ 的次数是否可能为奇数?

2. 三角形 ABC 是一个锐角三角形, 点 A', B', C' 分别在边 BC, CA, AB 上, 线段 AA', BB', CC' 交于三角形 ABC 内部一点 P. 以 AA', BB', CC' 为直径作圆, 在每个圆内, 过点 P 作垂直于直径的弦, 若所有的弦长相等. 求证: P 为三角形 ABC 的垂心.

3. 有 100 枚外观完全相同的硬币, 分为金银铜三种类型, 每种类型至少一枚. 每枚金币重 3 克, 每枚银币重 2 克,每枚铜币重 1 克. 现有一个无砝码的天平, 允许称重不超过101 次, 如何分辨出每一枚硬币的材质?

4. 考虑如下正数递增数列:

$$\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots.$$

其中两边都有无穷项. 对一个正整数 k, 该序列中任何连续 k 项的和除以这 k 项

修订日期: 2020-03-11.

中最大的一项的比值的最小上界记为整数 b_k. 证明：序列 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 要么是正整数列 $1, 2, 3, \cdots$, 要么从某项开始是常数.

5. 已知凸四边形 $ABCD$ 内部有一点 M 满足, 点 M 到直线 AB 和到直线 CD 的距离相等, 点 M 到直线 BC 和直线 AD 的距离也相等. 四边形 $ABCD$ 的面积等于 $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. 求证:

(1) 四边形 $ABCD$ 存在内切圆;

(2) 四边形 $ABCD$ 存在外接圆.

6. 一个由 $(2N)^3$个单位立方体组成的立方体被若干平行于它的边的针穿过(每根针恰好穿过 $2N$ 个单位立方体). 每个单位立方体被至少一根针穿过. 称这些针的某个子集是”正则的”, 如果这个这个集合中没有两根针穿过同一个单位立方体.

(1) 证明：存在一个由 $2N^2$ 根针组成的正则子集, 使得其中所有的针要么都是同一个方向, 要么有两个不同的方向;

(2) 求正则子集的元素个数最大值的最小可能值.

7. 将整数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 中的一部分染为红色, 使得对每个红色数的三元组 (a, b, c)(不必不同), 如果 $a(b-c)$ 是 n 的倍数, 则 $b = c$. 证明:红色数的个数不超过 $\varphi(n)$. (注: 对正整数 n, $\varphi(n)$ 表示 $1, 2, \cdots, n$ 中与 n 互素的数的个数.)

II. 解 答

题 1 多项式 $P(x, y)$ 满足: 对任意非负整数 n, $P(n, y)$ 和 $P(x, n)$ 中的每一个要么为零，要么为次数不超过 n 的多项式. 问: 多项式 $P(x, x)$ 的次数是否可能为奇数?

解 $P(x, x)$ 的次数不可能为奇数.

事实上, 我们可以归纳证明: 对每个非负整数 t, $P(x, y)$ 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xy(x-1)\cdots(x-t)(y-1)\cdots(y-t)T(x,y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t} a_i xy(x-1)\cdots(x-i+1)(y-1)\cdots(y-i+1) + a_0. \qquad (*) \end{aligned}$$

其中 $a_i (0 \le i \le t)$ 是复数, $T(x, y)$ 是复系数多项式.

对 t 进行归纳.

当 $t = 0$ 时, 在 $P(x, y)$ 中取 $n = 0$, 结合条件知, $P(0, x)$ 和 $P(x, 0)$ 均为常

数, 且该常数为 $P(0,0)=a_0$, 于是 $xy \mid (P(x,y)-a_0)$, 故存在多项式 $T(x,y)$,使得

$$P(x,y)=xyT(x,y)+a_0.$$

假设 $t-1$ 时结论成立, 下面考虑 t 的情况. 由归纳假设知, $t-1$ 时

$$\begin{aligned}P(x,y)=&\,xy(x-1)\cdots(x-t+1)(y-1)\cdots(y-t+1)T(x,y)\\&+\sum_{i=1}^{t-1}a_ixy(x-1)\cdots(x-i+1)(y-1)\cdots(y-i+1)+a_0.\end{aligned}$$

上式结合条件: 多项式 $P(t,y)$ 和 $P(y,t)$ 为常数 0 或者次数不超过 t,则 $T(t,y)$ 和 $T(y,t)$ 均为常数且该常数等于 $P(t,t)=a_t$, 于是

$$T(x,y)=a_t+(x-t)(y-t)T^{'}(x,y).$$

所以

$$\begin{aligned}P(x,y)=&\,xy(x-1)\cdots(x-t)(y-1)\cdots(y-t)T(x,y)\\&+\sum_{i=1}^{t}a_ixy(x-1)\cdots(x-i+1)(y-1)\cdots(y-i+1)+a_0.\end{aligned}$$

故 t 时命题成立, 由归纳法知 $P(x,y)$ 可写成形如 $(*)$ 的形式.

由于 $P(x,y)$ 次数有限. 设 $\deg P(x,y)=N$, 则取 $u=\lceil\frac{1}{2}N\rceil$, 则根据前面的证明, 有

$$\begin{aligned}P(x,y)=&\,xy(x-1)\cdots(x-u)(y-1)\cdots(y-u)T(x,y)\\&+\sum_{i=1}^{u}a_ixy(x-1)\cdots(x-i+1)(y-1)\cdots(y-i+1)+a_0.\end{aligned}$$

则 $T(x,y)=0$, 否则 $\deg P>N$. 从而

$$P(x,y)=\sum_{i=1}^{u}a_ixy(x-1)\cdots(x-i+1)(y-1)\cdots(y-i+1)+a_0.$$

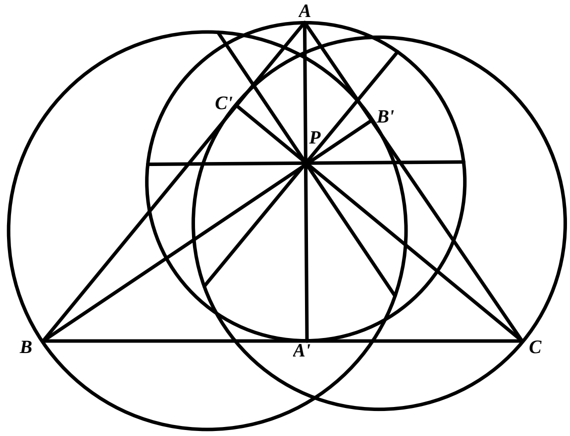
取最大的 $m\le u$, 使得 $a_m\neq 0$, 则 $P(x,x)$ 的次数为 $2m$ 是偶数.

所以, $P(x,x)$ 的次数不可能为奇数. □

评注 这个问题的关键是先猜想 $P(x,y)$ 的表达式. 从特殊情况出发, 通过 $t=0$ 和 $t=1$ 的情况就能猜出 $P(x,y)$ 的表达式, 然后再用归纳法证明即可.

题 2 三角形 ABC 是一个锐角三角形, 点 A',B',C' 分别在边 BC,CA,AB 上, 线段 AA',BB',CC' 交于三角形 ABC 内部一点 P. 以 AA',BB',CC' 为直径作圆, 在每个圆内, 过点 P 作垂直于直径的弦, 若所有的弦长相等. 求证: P

为三角形 ABC 的垂心.



证明 由条件知

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC',$$

因此由相交弦定理得 A, B, A', B'; A, C, A', C'; B, C, B', C' 分别四点共圆. 所以

$$\angle AA'C = \angle AC'C = \angle AB'B = \angle AA'B,$$

所以

$$\angle AA'C = \angle AA'B = 90°,$$

即 $AA' \perp BC$.

同理可得 $BB' \perp AC, CC' \perp AB$. 故点 P 是三角形 ABC 的垂心. □

评注 这是个简单题, 只需注意到由相交弦定理得到四点共圆即可.

题 3 有 100 枚外观完全相同的硬币, 分为金银铜三种类型, 每种类型至少一枚. 每枚金币重 3 克, 每枚银币重 2 克,每枚铜币重 1 克. 现有一个无砝码的天平, 允许称重不超过101 次, 如何分辨出每一枚硬币的材质?

解 (黄凤麟) 首先任取两枚硬币, 不妨设硬币重量为 a, b, 若 $a = b$, 则丢掉其中一枚硬币, 再任取一枚硬币与前面留下的硬币比较重量, 重复该操作, 直至得到两枚质量分别为 $a < b$ 的硬币为止.

(1) 若此时只剩一枚重量为 c 硬币, 其中 $c \neq a, c \neq b$. 将 $\{c, a\}$, $\{c, b\}$ 各称重一次, 即可分辨出所有硬币, 此时共称重 100 次.

(2) 若此时剩下至少两枚硬币. 对剩下的这些硬币也进行上述操作, 可得到重量为 $c < d$ 的两枚硬币. 下面对 $a + b$ 和 $c + d$ 称重,

(i) 若 $a + b = c + d$, 则有 $a = c, b = d$,丢掉 c, d, 继续重复上述操作;

(ii)若 $a+b<c+d$, 则 $a=1,d=3$. 继续比较 b,d 的大小, 若 $b=d$, 则 $a<c<d$. 若 $b<d$, 则 $a<b<d$.

此时, 我们都找到了重为 2 克的硬币. 将剩下的硬币与 2 克的硬币比较重量即可分辨出所有的硬币, 且操作次数不超过 101.

综合 (1),(2) 可知, 原问题成立. □

评注 这是一个比较常规的问题, 容易看出 100 和 101 可以用 n 和 $n+1$ 代替, 问题的关键在于确定重量为 2 克的硬币, 然后再将剩下的硬币与之比较即可. 在寻找重量为 2 克的硬币的过程中, 遇到重量相同的硬币是可以直接忽略的(因为用一次称量确定一枚硬币是恰好的), 因而只剩下有限的情况, 一一枚举即可.

题 4 考虑如下正数递增数列:

$$\cdots<a_{-2}<a_{-1}<a_0<a_1<a_2<\cdots.$$

其中两边都有无穷项. 对一个正整数 k, 该序列中任何连续 k 项的和除以这 k 项中最大的一项的比值的最小上界记为整数 b_k. 证明: 序列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ 要么是正整数列 $1,2,3,\cdots$, 要么从某项开始是常数.

证明 由条件得序列 $\{b_k\}$ 满足: $b_1\leq b_2\leq\cdots$ 以及 $b_k\leq k$.

若对任意整数 k, 都有 $b_k=k$, 则问题得证.

若存在正整数 k, 使得 $b_k\neq k$, 则 $b_k\leq k-1$. 下面说明序列 $\{b_k\}$ 有上界, 结合 $\{b_k\}$ 单调不减且 $\{b_k\}$ 均为整数, 知序列 $\{b_k\}$ 从某项开始是常数.

对任意正整数 t, 记 $S=\sum\limits_{i\leq t}a_i$, 而每 k 个连续项的和不超过最大数的 $k-1$ 倍, 则

$$\begin{aligned}S&\leq\sum_{i\leq t,i\equiv t(\bmod k)}(k-1)a_i\\&=(k-1)a_t+\sum_{i<t,i\equiv t(\bmod k)}(k-1)a_i\\&<(k-1)a_t+\sum_{i<t,i\equiv t(\bmod k)}\frac{k-1}{k}(a_i+\cdots+a_{i+k-1})\\&=(k-1)a_t+\frac{k-1}{k}(S-a_t).\end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{k}S<\frac{(k-1)^2}{k}a_t,$$

即

$$S < (k-1)^2 a_t.$$

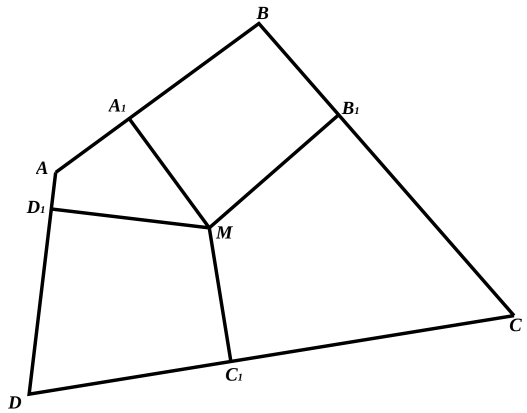
由 t 的任意性可知, 对任意的正整数 i，有 $b_i < (k-1)^2$, 即序列 b_i 有上界. 原问题得证. □

评注 容易想到用反证法证明该问题. 注意到数列 $\{b_n\}$ 单调不减, 要证明 $\{b_n\}$ 最终为常数列, 只需证明 $\{b_n\}$ 有上界即可. 由 n 的任意性, 只需证明 $\frac{\sum_{i\le t} a_i}{a_t}$ 有界即可. 剩下的任务就是不等式的放缩.

题 5. 已知凸四边形 $ABCD$ 内部有一点 M 满足, 点 M 到直线 AB 和到直线 CD 的距离相等, 点 M 到直线 BC 和直线 AD 的距离也相等. 四边形 $ABCD$ 的面积等于 $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. 求证:

(1) 四边形 $ABCD$ 存在内切圆;

(2) 四边形 $ABCD$ 存在外接圆.



证明 (1) 如图, 作 $MA_1 \perp AB, MB_1 \perp BC, MC_1 \perp CD, MD_1 \perp DA$, 只需证明 $MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1$.

设 $\angle AMA_1 = \alpha_1, \angle BMA_1 = \alpha_2, \angle BMB_1 = \beta_1, \angle B_1MC = \beta_2, \angle CMC_1 = \theta_1, \angle DMC_1 = \theta_2, \angle DMD_1 = \gamma_1, \angle D_1MA = \gamma_2$.

注意到 $MA_1 = MC_1$, 我们有

$$\begin{aligned}
S_{\triangle CMC_1} + S_{\triangle AMA_1} &= \frac{1}{2} MC \cdot MC_1 \sin\theta_1 + \frac{1}{2} MA \cdot MA_1 \sin\alpha_1 \\
&= \frac{1}{2} MC \cdot MA_1 \sin\theta_1 + \frac{1}{2} MA \cdot MC_1 \sin\alpha_1 \\
&= \frac{1}{2} MC \cdot MA \cos\alpha_1 \sin\theta_1 + \frac{1}{2} MA \cdot MC \cos\theta_1 \sin\alpha_1 \\
&= \frac{1}{2} MA \cdot MC (\cos\alpha_1 \sin\theta_1 + \cos\theta_1 \sin\alpha_1)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}MA\cdot MC\sin(\theta_1+\alpha_1).$$

同理可得

$$S_{\triangle DMC_1}+S_{\triangle BMA_1}=\frac{1}{2}MA\cdot MC\sin(\theta_2+\alpha_2),$$

$$S_{\triangle DMD_1}+S_{\triangle BMB_1}=\frac{1}{2}MB\cdot MD\sin(\beta_1+\gamma_1),$$

$$S_{\triangle AMD_1}+S_{\triangle CMB_1}=\frac{1}{2}MA\cdot MC\sin(\beta_2+\gamma_2).$$

将上述四式相加得

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}MA\cdot MC(\sin(\theta_1+\alpha_1)+\sin(\theta_2+\alpha_2))+\frac{1}{2}MB\cdot MD(\sin(\beta_1+\gamma_1)+\sin(\beta_2+\gamma_2)).$$

结合题目条件 $S_{ABCD}=MA\cdot MC+MB\cdot MD$ 以及三角函数的有界性知

$$\sin(\theta_1+\alpha_1)=\sin(\theta_2+\alpha_2)=\sin(\beta_1+\gamma_1)=\sin(\beta_2+\gamma_2)=1.$$

于是,

$$\theta_1+\alpha_1=\theta_2+\alpha_2=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2=90^\circ.$$

所以

$$\frac{MA_1}{MB_1}=\frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_1}=\frac{MC_1}{MD_1}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\gamma_1}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_1},$$

故 $\tan\alpha_2=\tan\beta_1$, 于是 $\alpha_2=\beta_1$, 故 $MA_1=MB_1=MC_1=MD_1$, 即四边形 $ABCD$ 有内切圆.

(2) 注意到 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ-\angle A_1MB_1+180^\circ-\angle C_1MD_1=360^\circ-(\alpha_2+\theta_2)-(\beta_1+\gamma_1)=180^\circ$, 故四边形 $ABCD$ 有外接圆. □

评注 要证明四边形 $ABCD$ 有内切圆, 只需证明点 M 到四条边的距离相等. 由于条件中已知四边形 $ABCD$ 的面积表达式, 我们要做的就是用另一种方式把 $ABCD$ 的面积表示出来, 因此想到把四边形 $ABCD$ 的面积表示为四组三角形的面积之和, 于是就得到了相应的角的关系, 问题就很容易得到证明.

题 6. 一个由 $(2N)^3$个单位立方体组成的立方体被若干平行于它的边的针穿过(每根针恰好穿过 $2N$ 个单位立方体). 每个单位立方体被至少一根针穿过. 称这些针的某个子集是"正则的", 如果这个这个集合中没有两根针穿过同一个单位立方体.

(1) 证明：存在一个由 $2N^2$ 根针组成的正则子集, 使得其中所有的针要么

都是同一个方向, 要么有两个不同的方向;

(2) 求正则子集的元素个数最大值的最小可能值.

证明 (李逸凡、颜川皓)

(1) 采用反证法, 假设结论不成立.

由于同一个方向的所有针显然构成一个正则子集, 故每个方向上的针数小于 $2N^2$. 对两个方向, 比如 x, y 方向, 则在每个 $z = k$ 的层上可取 x 方向和 y 方向上针数较多的一边的所有针.

记 $z = k$ 时, x 方向上有 x_k 根针, y 方向上有 y_k 根针. 则由反证法假设可知, $\sum\limits_{k=1}^{2N} \max\{x_k, y_k\} < 2N^2$, 从而由抽屉原理, 知存在某个正整数 k, 满足 $\max\{x_k, y_k\} \leq N-1$, 即 $x_k \leq N-1, y_k \leq N-1$. 此时, 这一层上其余的方块都必须由 z 方向的针来覆盖, 因此 z 方向上的所有针包含一个 $(N+1)\times(N+1)$ 的子阵.

由对称性, 知 x 方向和 y 方向上有同样的这样的子阵.

假设 z 方向上已有 $(N+i)\times(N+i)$ 的子阵, 设为 $x = 1, 2, \cdots, N+i$ 与 $y = 1, 2, \cdots, N+i$, 则在 $x = 1, 2, \cdots, N+i$ 的层中每层可至少取出 z 方向上的 $N+i$ 根针. 设此时 $x = k(N+i+1 \leq k \leq 2N)$ 的层上 y 方向的针有 $\widetilde{y_k}$ 根, z 方向的针有 $\widetilde{z_k}$ 根, 则由反证法假设

$$(N+i)^2 + \sum_{k=N+i+1}^{2N} \max\{\widetilde{y_k}, \widetilde{z_k}\} < 2N^2,$$

即

$$\sum_{k=N+i+1}^{2N} \max\{\widetilde{y_k}, \widetilde{z_k}\} < 2N^2 - N^2 - 2Ni - i^2 < (N-i)^2.$$

由抽屉原理, 知存在某个 $N+i+1 \leq k \leq 2N$ 满足 $\widetilde{y_k} \leq N-i-1, \widetilde{z_k} \leq N-i-1$, 故 x 方向上的针存在 $(N+i+1)\times(N+i+1)$ 的子阵. 由对称性, y, z 方向同理. 对 i 归纳可得某个方向上的针包含 $\sqrt{2}N \times \sqrt{2}N$ 的子阵, 矛盾.

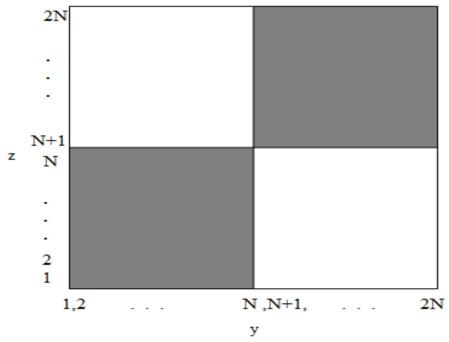
所以, 一定可以找出 $2N^2$ 个元素的正则子集, 包含至多两个方向.

(2) 首先给出构造:

对 x 方向, 取 y, z 都在 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 中或都在 $\{N+1, N+2, \cdots, 2N\}$ 中的共 $2N^2$ 根针, 即下图阴影部分的所有针.

对 y, z 方向的针取法类似.

此时, 可知每根针或与 $\{1, 2, \cdots, N\}^3$ 的立方体相交(且恰穿过 N 个方块), 或与 $\{N+1, N+2, \cdots, 2N\}^3$ 的立方体相交(且恰穿过 N 个方块).



由于取出的任两根针穿过的方块不同, 且这两个立方体中共有 $2N^3$ 个方块, 故取出的针不能超过 $\frac{2N^3}{N}=2N^2$.

综上述所, 正则子集的元素个数的最大值的最小可能值为 $2N^2$. $\square$

评注 这是一个有难度的问题, 题目的入手点在于运用反证法得到存在 $(N+1)\times(N+1)$ 的同方向的针阵. 整个题目的难点在于第二步, 需要注意到前面的做法具有推广的可能, 所以我们需要选择一个新的方向, 重复上述操作, 直到不能继续操作下去为止, 这样就得到一个 $\sqrt{2}N\times\sqrt{2}N$ 的针阵, 从而导致矛盾. 在第一小问的提示下, 第二问就相对容易去处理, 按照最常规的构造就可以发现第一问的结果确实是最优的.

题 7. 将整数 $1,2,3,\cdots,n$ 中的一部分染为红色, 使得对每个红色数的三元组 (a,b,c)(不必不同), 如果 $a(b-c)$ 是 n 的倍数, 则 $b=c$. 证明:红色数的个数不超过 $\varphi(n)$. (注: 对正整数 n, $\varphi(n)$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 中与 n 互素的数的个数.)

证明 (颜川皓) 对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, 显然成立.

当 n 为素数时, n 不能染为红色, 因为此时只需取 $a=n$ 就满足条件, b,c 可任意取值, 可以不相等, 故 n 为素数时也成立.

假设结论对小于 n 时都成立, 下面考虑 n 的情况.

设 $n=q^\alpha\cdot m$, 其中 q 为 n 的最大素因子, $m>1$.

若 $1,2,3,\cdots,n$ 中有一个 q 的倍数为红色, 则模 $\frac{n}{q}$ 的剩余类中至多有一个为红色, 即红色数至多有

$$\begin{aligned}\frac{n}{q}&=n\cdot\frac{q-1}{q}\cdot\frac{q-2}{q-1}\cdots\frac{1}{2}\\&=n\cdot(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q-1})\cdots(1-\frac{1}{2})\end{aligned}$$

$$\le n\cdot\prod_{p\text{为素数},p\mid n}(1-\frac{1}{p})$$
$$=\varphi(n).$$

结论成立.

下设没有 q 的倍数为红色.

设 $A_k=\{x\equiv k\pmod{q^\alpha}\mid 1\le x\le n\}$, q 不整除 k, 则由

$$n=q^\alpha\cdot m,(q,m)=1$$

知 A_k 的元素个数为 m, 且 A_k 中的元素遍历模 m 的完系, 由于对任意 $x,y\in A_k$, 均有 $q^\alpha\mid(x-y)$. 而对任意 $x,y,z\in A_k$,

$$n\mid z(x-y)\Leftrightarrow m\mid z(x-y),$$

且将 A_k 中的数模 m 即为 $1,2,\cdots,m$, 故可将 A_k 中的数看做 $1,2,\cdots,m$. 则由归纳假设, 知 A_k 中至多可取出 $\varphi(m)$ 个红色的数, 又 q 不整除 k, 故共有 $\frac{q-1}{q}\cdot q^\alpha\cdot\varphi(m)=\varphi(n)$ 个数是红数. 故 n 时命题成立.

综上可知, 原问题成立. □

评注 本题要证的结论是 $\varphi(n)$ 这一数论函数, 在对应方法行不通之后, 考虑使用归纳法, 并利用 $\varphi(n)$ 是一个积性函数. 通过设出 m 的形式, 只需去证明 p 的倍数不是红色的数, 且每一个模 m 的剩余类中至多有 $\varphi(n)$ 个数为红色. 后者由归纳假设可得, 若前者不成立, 又可导出至多有 $\varphi(n)$ 个红色数.