一道代数不等式的另解

程浩宇

(中国人民大学附属中学, 100080)

指导教师: 张端阳

2018 年秋季新星数学奥林匹克的第五题是一道优雅的不等式:

设非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 满足 $\sum\limits_{1\le i<j\le 2018} x_ix_j = 1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{s-x_i}$$

的最小值, 其中 $s=\sum\limits_{i=1}^{2018} x_i$.

文 [1] 中给出了两种解法, 并指出在 $n \ge 6$ 时方法均有效.

本文给出了另一种解法, 一并解决了 $n=3,4,5$ 时的情形. 特别 $n=3$ 时比 [2] 中两种调整法均要简便.

题目 给定整数 $n \ge 3$, 设非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j = 1$. 求

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-x_i}$$

的最小值, 其中 $s=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

解 对 $1 \le i \le n$, 由 $x_i(s-x_i) \le \sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j = 1$, 知

$$\frac{1}{s-x_i} \ge x_i.$$

两边同时乘以 x_i, 并对 i 求和得,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s-x_i} \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = s^2-2.$$

修订日期: **2020-04-02.**

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s}{s-x_i}-1\right)=s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}-n,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\geq s+\frac{n-2}{s}\geq 2\sqrt{n-2}. \tag{1}$$

我们来看如何取到 $2\sqrt{n-2}$, 这需要 $\frac{x_i}{s-x_i}=x_i^2$ 和 $s=\frac{n-2}{s}$, 即 $x_i=0$ 或 $x_i(s-x_i)=1$, 且 $s=\sqrt{n-2}$.

假设 x_r,x_s,x_t 均不为 0, 其中 $1\leq r<s<t\leq n$. 因为 $x_sx_t+x_r(s-x_r)$ 为 $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$ 中的项, 所以

$$x_sx_t+x_r(s-x_r)\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=1=x_r(s-x_r),$$

故 $x_sx_t\leq 0$, 与假设矛盾!

因此 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至少有 $n-2$ 个 0, 不妨设 $x_3=\cdots=x_n=0$, 则 $x_1x_2=1$. 又由

$$x_1+x_2=s=\sqrt{n-2},\ \text{且}\ (x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2,$$

知 $n\geq 6$.

所以只有 $n\geq 6$ 时能取到 $2\sqrt{n-2}$.

当 $n\geq 6$ 时, 取 $x_1=\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n-6}}{2},x_2=\frac{\sqrt{n-2}-\sqrt{n-6}}{2},x_3=\cdots=x_n=0$, 此时有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}=2\sqrt{n-2}.$$

故 $n\geq 6$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}$ 的最小值为 $2\sqrt{n-2}$.

下面考虑 $n=3,4,5$ 时.

由柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(s-x_i)x_i\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=s^2.$$

又

$$\sum_{i=1}^{n}(s-x_i)\,x_i=s\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^2=s^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}\geq\frac{s^2}{2},$$

即

$$s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}-n\geq\frac{s^2}{2},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\geq\frac{s}{2}+\frac{n}{s}.$$

注意到 (1) 式中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\geq s+\frac{n-2}{s}$ 对于 $n=3,4,5$ 仍然成立.

下面分两种情况讨论:

(1) $s\leq 2$ 时, 由 $\sqrt{2n}>2$, $\frac{s}{2}+\frac{n}{s}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减, 所以

$$\frac{s}{2}+\frac{n}{s}\geq 1+\frac{n}{2}.$$

(2) $s>2$ 时, 由 $\sqrt{n-2}<2$, $s+\frac{n-2}{s}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以

$$s+\frac{n-2}{s}>2+\frac{n-2}{2}=1+\frac{n}{2}.$$

故总有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\geq 1+\frac{n}{2}$, 当 $x_1=x_2=1, x_3=\cdots=x_n=0$ 时可取到.

综上, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}$ 的最小值为 $\begin{cases}1+\frac{n}{2}, & n=3,4,5\\ 2\sqrt{n-2}, & n\geq 6\end{cases}$. □

参考文献

[1] 吴尉迟, 罗振华. 2018 年秋季上海新星数学奥林匹克试题解析 [J], 数学新星网 · 教师专栏: 2018-12-26 期.

[2] 2003 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦. 2003[M]. 华东师范大学出版社, 2003.