KöMaL 征解问题 A.769 的另解

尹顺　王琇
(湖南师范大学附属中学, 410006)
指导教师: 汤礼达

匈牙利数学杂志 KöMaL 在 2020 年 2 月的一道征解问题如下:

A.769 求所有由不同的正整数组成的三元数组 (a, b, c), 满足存在一个由正整数组成的集合 S, 使得对于任意正整数 n 都有 an, bn, cn 三个整数中有且仅有一个属于 S.

李逸凡给出了这个问题的一个解答, 这里我们再给出另外一种解.

解 设集合

$$T = \{(dx, dy, dz) \mid x, y, z, d \in \mathbb{Z}, d \geq 0, x + y + z = 0 \text{ 且 } 3 \nmid xyz\}.$$

我们证明 (a, b, c) 满足题意当且仅当关于 x, y, z 的不定方程组

$$\begin{cases} a^x b^y c^z = 1, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{Z},$$

的解集含于 T.

必要性: 先证明如下引理.

引理 若 $u \in S$, $abc \mid u$, 则正整数

$$u\frac{a^2}{bc}, u\frac{b^2}{ac}, u\frac{c^2}{ab} \in S.$$

证明 由 $u \in S$ 及对正整数 $\frac{u}{a}$ 有

$$\left|S \cap \left\{\frac{u}{a} \cdot a, \frac{u}{a} \cdot b, \frac{u}{a} \cdot c\right\}\right| = 1,$$

知 $u \cdot \dfrac{b}{a}, u \cdot \dfrac{c}{a} \notin S$, 同理

$$u \cdot \frac{c}{b} \notin S.$$

修订日期: **2020-04-01.**

于是由于 $\frac{uc}{ab}\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|S\cap\left\{\frac{uc}{ab}\cdot a,\ \frac{uc}{ab}\cdot b,\ \frac{uc}{ab}\cdot c\right\}\right|=\left|S\cap\left\{u\cdot\frac{c}{b},\ u\cdot\frac{c}{a},\ u\cdot\frac{c^2}{ab}\right\}\right|=1,$$

则

$$u\frac{c^2}{ab}\in S.$$

同理

$$u\frac{a^2}{bc},\ u\frac{b^2}{ac}\in S,$$

引理即证.

回到必要性的证明, 假设存在满足题意的 $(a,\ b,\ c)$, 使得存在 $x_0,\ y_0,\ z_0\in\mathbb{Z},\ x_0+y_0+z_0=0$, 满足 $a^{x_0}b^{y_0}c^{z_0}=1$, 且 $(x_0,\ y_0,\ z_0)\notin T$. 则 $(x_0,\ y_0,\ z_0)\neq(0,\ 0,\ 0)$, 不妨设 $\gcd(x_0,\ y_0,\ z_0)=1$, 则 $3\mid x_0y_0z_0$. 从而 $x_0,\ y_0,\ z_0$ 中恰有一个 3 的倍数, 不妨设 $3\mid z_0$. 进而由 $x_0+y_0+z_0=0$ 知可不妨设

$$x_0\equiv 1\pmod 3,\quad y_0\equiv 2\pmod 3.$$

于是令

$$k=\frac{2x_0+y_0+2}{3},\ l=\frac{-x_0-2y_0-1}{3},$$

则 $k,\ l$ 都是整数且

$$a^{2k+l-1}b^{-k-2l}c^{-k+l+1}=a^{x_0}b^{y_0}c^{-x_0-y_0}=a^{x_0}b^{y_0}c^{z_0}=1.$$

此即

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{bc}\right)^k=\frac{1}{c}\left(\frac{b^2}{ac}\right)^l.\tag{$*$}$$

取正整数 $M>|k|+|l|$, 易知存在 $N\in S$ 为 $(abc)^{|k|+|l|+2M+1}$ 的倍数, 因 $k+M, l+M$ 均为正整数, 故由引理归纳知

$$N\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{k+M}\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{M},\ N\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{M}\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{l+M}\in S,$$

且均为 abc 的倍数. 在条件中令 $n=\frac{N}{a}\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{k+M}\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{M}$, 则由$(*)$知 $an,\ cn\in S$, 从而矛盾. 故假设不成立, 必要性得证.

充分性: 对正整数 $n,\ m$, 定义 $n\sim m$ 当且仅当存在和为 0 的整数 $x,\ y,\ z$ 满足 $n=m\cdot a^xb^yc^z$. 容易验证这是 $\mathbb{N}^*$ 上的等价关系, 并将 $\mathbb{N}^*$ 划分成若干等价类, 在每个等价类中取出一个代表元组成集合 A. 对 $u\in A$, 设 u 所在的等价类为 S_u, 令

$$S=\bigcup_{u\in A}\{ua^xb^yc^z\mid x,\ y,\ z\in\mathbb{Z},\ x+y+z=0,\ 3\mid(x-y),\ ua^xb^yc^z\in S_u\},$$

我们验证 S 满足条件.

若

$$ua^{x_1}b^{y_1}c^{z_1}=ua^{x_2}b^{y_2}c^{z_2},$$

其中 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 是两组和为 0 的整数, 则

$$a^{x_1-x_2}b^{y_1-y_2}c^{z_1-z_2}=1.$$

由于关于 $x,\ y,\ z$ 的不定方程 $a^xb^yc^z=1$, $x,\ y,\ z\in\mathbb{Z}$, 且 $x+y+z=0$ 的解集含于 T, 故 $(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)\in T$. 注意到如果 $(x,\ y,\ z)\in T$, 则 $3\mid(x-y)$, 从而 $3\mid(x_1-x_2)-(y_1-y_2)$, 即

$$x_1-y_1\equiv x_2-y_2\pmod 3,$$

于是 S 定义良好.

对任意正整数 n, 设 an 所在的等价类代表元为 u, 设

$$an=ua^{x_0}b^{y_0}c^{z_0},$$

其中 $x_0,\ y_0,\ z_0\in\mathbb{Z}$, $x_0+y_0+z_0=0$, 则

$$bn=ua^{x_0-1}b^{y_0+1}c^{z_0},\ bn\in S_u,$$

$$cn=ua^{x_0-1}b^{y_0}c^{z_0+1},\ cn\in S_u.$$

由于

$$x_0-y_0,\ (x_0-1)-(y_0+1)=x_0-y_0-2,\ x_0-1-y_0$$

模 3 互异, 其中恰有一个为 3 的倍数, 故 $an,\ bn,\ cn$ 中恰有一个在 S 中, 充分性即证. □

评注 如果我们考虑 $a,\ b,\ c$ 关于 abc 的所有素因子 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ 的幂次组成的 k 元数组 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, 则命题等价于对于存在集合 $S'\subseteq\mathbb{N}^k$, 满足对每个 $v\in\mathbb{N}^k$, $v+\alpha$, $v+\beta$, $v+\gamma$ 中恰有一个在 S' 中. 从一维情况考虑起, 可以知道如果 $v+\alpha+\beta+\gamma\in S$, 则 $v+3\alpha\in S'$, 这样就容易推出 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 之间需要满足的条件. 对于多维情况, 实际上是一致的.