数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

贝蒂—瑞利定理与一道数列问题的探究与思考

刘家瑜
(长沙市中雅培粹学校, 410007)
指导教师: 申东

贝蒂-瑞利定理是有关正整数划分的著名定理, 形式和结构都十分漂亮, 在一些与数列相关的问题中可以有巧妙的应用. 本文将探讨一个经典的数列问题, 当中蕴含着该定理的妙用.

I. 预备知识

1. 正整数集上的**互补数列**定义.

正整数数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 如果满足:

(1) 对任意的 $i,\ j \in \mathbb{N}_+,\ i \neq j$, 均有 $x_i \neq x_j,\ y_i \neq y_j$;

(2) 对任意的 $i,\ j \in \mathbb{N}_+$, 均有 $x_i \neq y_j$;

(3) 集合 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots\}$ 与 $\{y_1,\ y_2,\ \cdots\}$ 的并集为 $\mathbb{N}_+$.

则称数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 在正整数集上互为互补数列.

2. 贝蒂-瑞利定理

设 $\alpha,\ \beta$ 为正无理数, 且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, 则数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为正整数集上的互补数列, 这里 $a_n=[\alpha n],\ b_n=[\beta n],\ n=1,\ 2,\ \cdots$.

证明 由 $\alpha,\ \beta$ 为正无理数, 且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \Rightarrow \alpha,\ \beta>1$, 易知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为递增的正整数数列, 显然满足条件 (1).

若存在 $l \in \mathbb{N}_+$, 使得 $[\alpha i]=[\beta j]=l(i,\ j \in \mathbb{N}_+)$, 则有 $l \leq \alpha i<l+1,\ l \leq \beta j<l+1$, 所以

$$\frac{i}{l+1}<\frac{1}{\alpha} \leq \frac{i}{l},\ \frac{j}{l+1}<\frac{1}{\beta} \leq \frac{j}{l}.$$

又 $\alpha,\ \beta$ 为正无理数, 故有

$$\frac{i}{l+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{i}{l},\ \frac{j}{l+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{j}{l},$$

修订日期: 2020-05-09.

从而得到

$$\frac{i+j}{l+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{i+j}{l}\Rightarrow l<i+j<l+1,$$

但两个相邻的正整数 l, $l+1$ 之间不存在正整数, 矛盾. 所以数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件 (2).

若存在 $l\in\mathbb{N}_+$, 使得 $l\notin\{x_1,\ x_2,\ \cdots\}\bigcup\{y_1,\ y_2,\ \cdots\}$, 则存在 $i,\ j\in\mathbb{N}_+$, 使得 $[\alpha i]\leq l-1$, 且 $[\alpha(i+1)]\geq l+1$, $[\beta j]\leq l-1$, 且 $[\beta(j+1)]\geq l+1$, 类似上面的推理可得,

$$\frac{i}{l}<\frac{1}{\alpha}<\frac{i+1}{l+1},\ \frac{j}{l}<\frac{1}{\beta}<\frac{j+1}{l+1}.$$

所以

$$\frac{i+j}{l}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{i+j+2}{l+1}\Rightarrow i+j<l<l+1<i+j+2,$$

这也是矛盾的. 所以数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件 (3).

综上, 定理得证. □

II. 问 题

在学兄的笔记本上我见到了如下问题:

问题 定义数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, a_n 是满足 $n\mid a_1+a_2+\cdots+a_n$ 且 $a_n\neq a_i(i<n)$ 的最小正整数. 求证: $a_{a_n}=n$.

证法 1 考虑正整数数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$, 我们按如下方式操作:

1 固定不变, 第 1 次操作 2, 3 交换位置(用 $\leftrightarrow$ 表示交换位置), 记为 $2\leftrightarrow 3$, 第 2 次操作 $4\leftrightarrow 6$, $\cdots$, 第 t 次操作 $k_t\leftrightarrow k_t+t$ (k_t 为前 $t-1$ 次操作后, 数列中没有参与过操作的最小数(大于 1)). 记操作后得到的新数列为 $\{b_n\}$, 显然每一项都是二阶不动点, 有 $b_{b_n}=n$.

记集合 $T=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$, 设集合 T 与集合 $\overline{T}(\overline{T}=\mathbb{N}_+\setminus T)$ 之间恰进行了 $t(0\leq t\leq n-1)$ 次上述的操作, 这些操作中比 n 大的数交换到了前面(到集合 T 内), 而不大于 n 的数交换到了后面(到集合 $\overline{T}$ 内). 记集合 T 中参与了这 t 次操作的数分别为

$$(n<)b_{n_1}<b_{n_2}<\cdots<b_{n_t}.$$

并设其中 b_{n_i} 参与的是第 $c_{n_i}(1\leq i\leq t)$ 次操作, 可知 $c_{n_i}(1\leq i\leq t)$ 为连续的正整数且 $c_{n_1}<c_{n_2}<\cdots<c_{n_t}$ (这是因为, 若 $c_{n_2}<c_{n_1}$, 注意到第 c_{n_2} 次操作为

$(b_{n_2}-c_{n_2})\leftrightarrow b_{n_2}$. 但此时, 原数列中比 $(b_{n_2}-c_{n_2})$ 小的数 $(b_{n_1}-c_{n_1})$ 还没有被操作过(它参与的是第 c_{n_1} 次), 与操作要求相矛盾. 若 $c_{n_2}>c_{n_1}+1$, 设第 $c_{n_1}+1$ 次操作为 $x\leftrightarrow(x+c_{n_1}+1)$, 则类似可得,

$$b_{n_1}-c_{n_1}<x<b_{n_2}-c_{n_2}\le n,$$

因此

$$x+c_{n_1}+1>b_{n_1}+1>n,$$

这也属于集合 T 与集合 $\overline{T}$ 之间的操作, 矛盾. 所以 $c_{n_2}=c_{n_1}+1$ 同理, $c_{n_3}=c_{n_2}+1\cdots$, 依此类推, 进一步有 $c_{n_i}(1\le i\le t)$ 为依次连续的正整数).

下面首先证明: $n\mid b_1+b_2+\cdots+b_n$. $(*)$

我们不妨证明一个更强的命题: $n\mid b_1+b_2+\cdots+b_n$ 且 $c_{n_1}+c_{n_t}=n$. (后式在 $t\ge1$ 时才需考虑)

(1) 写出数列 $\{b_n\}$ 的前几项: 1, 3, 2, 6, 8, 4, $\cdots$. $n=1$ 时, 命题显然成立. $n=2$ 时, $2\mid b_1+b_2$, $b_2(=3)$ 与集合 $\{b_1,\ b_2\}$ 外的数交换位置, 此时 $t=1$, $c_{n_1}=c_{n_t}=1$, $c_{n_1}+c_{n_1}=2$, 命题也成立.

(2) 假设命题对 $n(n\ge2)$ 成立, 考虑 $n+1$ 时的情形. 下面按 b_{n+1} 分类讨论.

(I) 若 b_{n+1} 与 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 中某个数交换了位置, 则显然是 $b_{n+1}\leftrightarrow b_{n_1}$. 此时, $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ b_{n+1}$ 与 $b_{n+2},\ b_{n+3},\ \cdots$ 之间的数恰进行了 $t-1$ 次上述的操作(考虑到 $b_{n+1}\leftrightarrow b_{n_1}$, 这里 $t>0$). 我们重新分别记 $c'_{n_i}=c_{n_{i+1}}(1\le i\le t',\ t'=t-1)$, 由 $c_{n_i}(1\le i\le t)$ 为依次连续的正整数及归纳假设, 可知, $c'_{n_1}+c'_{n_{t'}}=c_{n_2}+c_{n_t}=c_{n_1}+1+c_{n_t}=n+1$. (若 $t=1$, $c_{n_2},\ \cdots,\ c_{n_t}$ 都不存在, 均视为0, 也不影响后续计算和推理).

又考虑到 $b_2,\ \cdots,\ b_n,\ b_{n+1}$ 内部之间互换位置的数必为偶数个, 所以 $n\equiv t-1\pmod 2$.

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}b_i&=1+2+\cdots+(n+1)+(c_{n_2}+\cdots+c_{n_t})\\&=\frac{n+t+1}{2}\cdot(n+1)\\&\equiv0\pmod n+1.\end{aligned}$$

(II) 若 b_{n+1} 与其后某个数交换了位置, 重新分别记

$$c'_{n_i}=c_{n_i}(1\le i\le t),\ c'_{n_{t'}}=c_{n_t}+1(t'=t+1),$$

由 $c_{n_i}(1\le i\le t)$ 为依次连续的正整数及归纳假设, 可知, $c'_{n_1}+c'_{n_{t'}}=c_{n_1}+c_{n_t}+$

$1 = n+1$ (特别地, 若 $t=0$, b_2, $\cdots$, b_n 都在内部之间互换位置, 共进行了 $\frac{n-1}{2}$ 次操作, 从而 b_{n+1} 参与的是第 $\frac{n+1}{2}$ 次操作, 故 $c'_{n_1} = c'_{n_{t'}} = \frac{n+1}{2}$, 仍然满足).

类似 (I) 可得 $2 \mid n+t+1$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = (1+\frac{n+t+1}{2})(n+1) \equiv 0 \pmod n + 1.$$

故 $n+1$ 时命题成立.

由归纳原理. 对任意正整数 n, 命题成立.

再证明:数列 $\{b_n\}$ 即为数列 $\{a_n\}$.

(1) $n = 1,\ 2,\ 3$ 时, 逐一验证即可.

(2) 假设命题对 $n \le l-1 (l \ge 4)$ 均成立, 考虑 $n = l$ 时的情形.

由 $(*)$ 式知 $l \mid b_1 + b_2 + \cdots + b_l$, 由归纳假设可得 $l \mid a_1 + \cdots + a_{l-1} + b_l$, 结合

$$l \mid a_1 + \cdots + a_{l-1} + a_l \Rightarrow l \mid a_l - b_l. \quad ①$$

若 $b_l \le l$, 由 a_l 的最小性知必有 $b_l = a_l$.

下设 $b_l = m > l$, 则 $l \leftrightarrow m$. 而 b_2, $\cdots$, b_{l-1} 至多参与 $l-2$ 次操作, 由数列 $\{b_n\}$ 定义知,

$$b_l \le l + (l-1) \Rightarrow m < 2l. \quad ②$$

假设 $a_l \ne m$, 结合 ①, ②及 a_l 的最小性知必有 $a_l = m - l$. 这是矛盾的. 事实上, 我们只需证明 b_2, $\cdots$, b_{l-1} (即 a_2, $\cdots$, a_{l-1})中某个数的值为 $m-l$.

设 $(m-l) \leftrightarrow (m-l+w)$, 则 $b_{m-l+w} = m-l$, 假设 $b_{m-l+w} \notin \{b_2, \cdots, b_{l-1}, b_l\}$, 则

$$m - l + w > l. \quad ③$$

记集合 $M = \{2,\ 3,\ \cdots,\ m-l+w\}$. 注意到 $(m-l) \leftrightarrow (m-l+w)$ 为第 w 次操作, 故前 w 次操作中, 集合 M 内参与操作的数为 $2w$ 个(由操作规则, 这些操作均在集合 M 内部两数之间进行).

设第 $x(w+1 \le x \le m-l)$ 次操作为 $A \leftrightarrow B(A<B)$, 由 ③得, $l \in M$, 且注意到 $l \leftrightarrow m$ 为第 $m-l$ 次操作, 由操作规则, 有

$$m - l < A \le l < m - l + w < A + w < B.$$

即 $A \in M$, 且 $B \notin M$. 这表明, 从第 $w+1$ 次操作开始, 到第 $(m-l)$ 次操作结束, 集合 M 中有 $m-l-w$ 个数参与操作(每次操作集合 M 中恰有 1 个数参与).

综上, 集合 M 中参与上述操作的数共计

$$2w + m - l - w = m - l + w (> |M|)$$

个, 这不符合操作规则, 矛盾. 所以假设不成立, $a_l = m = b_l$.

由归纳原理, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $a_n = b_n$.

故 $a_{a_n} = n$. 证毕. $\square$

III. 思 考

以上是我最初的证法. 在求解过程中, 注意到数列 $\{a_n\}$ 具有一些美好的性质, 便进行了一些探究. 不妨先观察数列 $\{a_n\}$ 前几项:

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 11,\ 5,\ 14,\ 16,\ 7,\ 19,\ 21,\ 9,\ 24,\ 10\cdots.$$

我们将 3 与 2 交换位置(记为 $3 \leftrightarrow 2$), $6 \leftrightarrow 4$, $8 \leftrightarrow 5$, $11 \leftrightarrow 7$, $14 \leftrightarrow 9$, $16 \leftrightarrow 10$, $\cdots$ 得到数列:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots$$

这个数列显然代数上更容易刻画. 又注意到,

$$3-2=1,\ 6-4=2,\ 8-5=3,\ 11-7=4,\ 14-9=5,\ 16-10=6,\ \cdots$$

这种交换呈现出一定的规律, 我们把每次交换过程中的较小数与较大数分开写成两个数列.

$$\{x_n\}: 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ \cdots$$

$$\{y_n\}: 3,\ 6,\ 8,\ 11,\ 14,\ 16,\ 19,\ 21,\ 24,\ \cdots$$

(事实上, 也可以认为 1 与自身对换)

再将两个数列中每一项都减去1, 得到

$$\{x'_n\}: 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ \cdots$$

$$\{y'_n\}: 2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13,\ 15,\ 18,\ 20,\ 23,\ \cdots$$

满足对任意正整数 n, 均有 $y'_n - x'_n = n$. 发现 $\{x'_n\}$ 与 $\{y'_n\}$ 为正整数集上的互补数列, 自然猜想其与贝蒂-瑞利定理有关联.

设 $y'_n = [\beta n]$, $x'_n = [\alpha n]$, $y'_n - x'_n = n$, 则 $\beta - \alpha = 1$, 联立 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ 解得,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

进一步猜测:

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] + 1 \leftrightarrow \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right] + 1 (n \in \mathbb{N})$$

得到数列 $\{a_n\}$ (可以定义 1 与本身交换).

藉此, 我们得到下面的证明.

证法 2 考虑正整数数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$, 我们按如下方式操作:

1 固定不变, 第 $n(n\geq 1)$ 次操作 $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$, $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$ 交换位置(用 $\leftrightarrow$ 表示交换位置), 记为

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]\leftrightarrow\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right].$$

设操作后得到的新数列为 $\{b_n\}$.

由贝蒂-瑞利定理知, 1以外的每个正整数都参与了唯一一次操作, 有 $b_{b_n}=n$.

记 $M=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 若 $b_l\in M$, b_l 与集合 M 外的数交换位置. 则有:

$$l=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}k\right]\leq n,\ b_l=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}k\right]\geq n+1.$$

因此

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]\leq k\leq\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right].$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}b_i&=\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{k=\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]}^{\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right]}k\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\left(\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]+\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right]\right)\left(\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right]-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]+1\right)}{2}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n\left(2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right]-n+1\right)}{2}\\&=n\left(\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n\right]+1\right)\\&\equiv 0\pmod n\end{aligned}$$

再证明: 数列 $\{b_n\}$ 即为数列 $\{a_n\}$.

(1) $n=1, 2, 3$ 时, 逐一验证可证.

(2) 假设不大于 $n-1(n\geq 4)$ 时, 命题成立, 考虑 n 时的情形.

若 $n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}l\right]+1$, $l\in\mathbb{N}_+$, 可得

$$b_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right]+1<n,$$

由操作规则及归纳假设, 此时 b_n 满足最小性, 所以 $a_n=b_n$.

若 $n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right]+1,\ l\in\mathbb{N}_+,\ l\geq 2$, 有

$$b_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}l\right]+1.$$

假设 $a_n\neq b_n$, 则必有

$$a_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}l\right]+1-\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right]-1=l.$$

下面我们证明这是不可能的.

当 $l=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]+1,\ m\in\mathbb{N}_+$, 可得 $m\leq\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$, 因此

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\Rightarrow\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]\leq\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right],$$

由贝蒂-瑞利定理, 等号不成立. 进一步, 有

$$1+\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]\leq\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right]<n,$$

故

$$a_{\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]+1}=b_{\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]+1}=l.$$

矛盾.

当 $l=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]+1,\ m\in\mathbb{N}_+$, 可得

$$b_{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]+1}=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]+1,$$

且 $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]+1<l<n$. 此时

$$a_{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]+1}=b_{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]+1}=l.$$

矛盾.

从而假设不成立, 即 $a_n=b_n$.

由归纳原理, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 命题成立.

故 $a_{a_n}=n$. 证毕. □

IV. 小 结

至此, 对于数列 $\{a_n\}:1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 11,\ 5,\ 14,\ 16,\ 7,\ 19,\ 21,\ 9,\ 24,\ 10\cdots$. 我们可以得到其有如下性质:

(1) 通项公式: $a_n=n\left[\frac{2n}{\sqrt{5}+1}\right]-(n-1)\left[\frac{2(n-1)}{\sqrt{5}+1}\right]$;

(2) 前 n 项的和: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \left[\frac{2n}{\sqrt{5}+1}\right] n$;

(3)$a_{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]+1} = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right] + 1,\ a_{\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]+1} = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] + 1(n \in \mathbb{N})$;

(4) 二阶不动点的性质: $a_{a_n} = n$;

(5) 数论性质: $a_1 = 1$, a_n 是满足 $n \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 且 $a_n \neq a_i(i < n)$ 的最小正整数;

(6) 设 $x'_n = [\frac{1+\sqrt{5}}{2}n]$, $y'_n = [\frac{3+\sqrt{5}}{2}n]$, 则数列 $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}(n \in \mathbb{N}_+)$ 为正整数集上的互补数列.

V. 展望与联想

我们已经发现了数列 $\{a_n\}$ 的一些代数和数论的性质. 比较有趣的是, 这个数列还具备很有意思的组合背景. 历届的 IMO 试题中也不乏该数列的身影. 下面几个问题均与之相关.

问题 1 (Wythoff 游戏) 甲、乙两人轮流从两堆棋子中取棋子. 满足下列要求:或者从一堆中取若干枚(至少一枚)棋子, 或者从两堆中取出同样数目(至少一枚)棋子. 将两堆取完并取到最后一枚棋子者获胜.

问:在什么情况下, 甲(先取者)有必胜策略?

问题 2 (20 届 IMO T3) 全体正整数集合可以分成两个互不相交的正整数子集

$$\{f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots\},\ \{g(1),\ g(2),\ \cdots,\ g(n),\ \cdots\}.$$

其中

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots,\ g(1) < g(2) < \cdots < g(n) \cdots,$$

且有 $g(n) = f(f(n)) + 1$, $n \geq 1$. 求 $f(240)$.

问题 2 (34 届 IMO T5) 设 $\mathbb{N}_+$ 是全体正整数集合, 是否存在一个定义在集合 $\mathbb{N}_+$ 上的函数 $f(n)$, 具有如下性质:

(1) 对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$, $f(n) \in \mathbb{N}_+$;

(2) 对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$, $f(n) < f(n+1)$;

(3) $f(1) = 2$;

(4) 对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$, $f(f(n)) = f(n) + n$.

事实上, 问题 1 的解是两堆棋子数目为所有的非 $({x'}_n,\ {y'}_n)$ (无序对), 即两堆

棋子的数目不能表示为 $([\frac{1+\sqrt{5}}{2}n], [\frac{3+\sqrt{5}}{2}n])$ 的时候甲有必胜策略. 读者可以尝试证明或者参阅文[1].

问题 2 中的 $f(n)=x'_n=[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n]$, $g(n)=y'_n=[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n]$. 这里还可以发现数列的另一个性质, $y'_n=x'_{x'_n}+1$. 问题 2 和问题 3 的解答均可以参阅文 [2].

另外, 注意到特征数字 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 也容易联想到该数列与斐波那契数列可能具有一定的关系, 这里就不再展开讨论了.

参考文献

[1] 张垚, 沈文选, 冷岗松. 奥林匹克数学中的组合问题 [M] 湖南师范大学出版社. 2015. 1

[2] 刘培杰. 历届IMO试题集 [M]. 哈尔滨工业大学出版社. 2006. 5.