对一道 IMC 不等式最佳常数的探究

廖昱博

(中国人民大学附属中学, 100080)

指导教师: 张端阳

在 2000 年 IMC (国际大学生数学竞赛) 第一天的比赛中, 第四题是一道不等式:

a) 证明: 若 $\{x_i\}$ 是递减的正项数列, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

b) 证明: 存在常数 C, 使得若 $\{x_i\}$ 是递减的正项数列, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} \le C \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

先将原解答抄录如下:

证明 a)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2 &= \sum_{i,j}^{n} \frac{x_i x_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \ge \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sqrt{i}} \sum_{j=1}^{i} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \\ &\ge \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sqrt{i}} \cdot i \frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.\end{aligned}$$

b) 由 a),

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} &\le \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{x_i}{\sqrt{i-m+1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}\right).\end{aligned}$$

因为

$$\sup_i \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}} \le \int_0^{i+1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{i+1-x}}\, \mathrm{d}x = \pi,$$

修订日期: 2020-05-21.

所以可取 $C=\pi$. □

注意到原解答 a) 中的放缩比较大, 事实上我们有更强的结果:

命题 若 $\{x_i\}$ 是递减的正项数列, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i.$$

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时命题显然成立. 假设命题当 $n=k$ 时成立, 来看 $n=k+1$ 时的情形.

由归纳假设,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i\right)^2,$$

所以为证

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k+1}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i\right)^2,$$

只需证明

$$x_{k+1}^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k+1}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i\right)^2,$$

即

$$x_{k+1}^2 \le (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})x_{k+1}\left(2\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})x_{k+1}\right),$$

即

$$\sqrt{k}x_{k+1} \le \sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i.$$

这由 $x_{k+1}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\}$ 及

$$\sqrt{k}=\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})$$

即证.

归纳证毕. □

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}},$$

所以命题比 a) 强了近一倍. 这使我们有理由相信 b) 中的 C 可改进为 $\frac{\pi}{2}$ 左右.

本文来证明 C 的最佳值为 $\frac{\pi}{2}$, 即有

定理 设 $\{x_i\}$ 是递减的正项数列, 则使得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{\infty}x_i^2\right)^{1/2}\leq C\sum_{i=1}^{\infty}x_i$$

成立的最佳常数 C 为 $\frac{\pi}{2}$.

先证明两个引理.

引理 1 给定正整数 n, 设正实数 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$, 则使得

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\leq C_n\sum_{i=1}^{n}x_i$$

成立的最佳常数 C_n 为

$$\lambda_n=\max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{i}\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}.$$

证明 一方面, 对 $1\leq i\leq n$, 取 $x_1=x_2=\cdots=x_i=t, x_{i+1}=\cdots=x_n\to 0$, 则

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\to\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}t,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\to it,$$

所以

$$C_n\geq\frac{1}{i}\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}},$$

从而 $C_n\geq\lambda_n$.

另一方面, 我们证明

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\leq\lambda_n\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

这有两种方法.

法 1 由命题,

$$\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\leq\sum_{i=m}^{n}(\sqrt{i+1-m}-\sqrt{i-m})x_i,$$

结合 Abel 变换得,

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\leq\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=m}^{n}\frac{\sqrt{i+1-m}-\sqrt{i-m}}{\sqrt{m}}x_i$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{i}\frac{\sqrt{i+1-m}-\sqrt{i-m}}{\sqrt{m}}\right)x_i\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i}\sum_{m=1}^{j}\frac{\sqrt{j+1-m}-\sqrt{j-m}}{\sqrt{m}}\right)(x_i-x_{i+1})+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{j}\frac{\sqrt{j+1-m}-\sqrt{j-m}}{\sqrt{m}}\right)x_n\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i}\sum_{j=m}^{i}\frac{\sqrt{j+1-m}-\sqrt{j-m}}{\sqrt{m}}\right)(x_i-x_{i+1})+\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=m}^{n}\frac{\sqrt{j+1-m}-\sqrt{j-m}}{\sqrt{m}}\right)x_n\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{i}\frac{\sqrt{i+1-m}}{\sqrt{m}}\right)(x_i-x_{i+1})+\sum_{m=1}^{n}\frac{\sqrt{n+1-m}}{\sqrt{m}}x_n\\
&\le\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_n i(x_i-x_{i+1})+\lambda_n n x_n\\
&=\lambda_n\sum_{i=1}^{n}x_i.
\end{aligned}
$$

法 2 令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}-\lambda_n\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

对 $1\le i\le n$, 记

$$f_i(t)=F(\underbrace{t,t,\cdots,t}_{i\text{个}},x_{i+1},\cdots,x_n).$$

如果证明了每个 $f_i(t)$ 均在 $(0,+\infty)$ 上单调不增, 则

$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)&\le F(x_2,x_2,x_3,\cdots,x_n)\\
&\le F(x_3,x_3,x_3,x_4,\cdots,x_n)\\
&\le\cdots\cdots\\
&\le F(x_n,x_n,\cdots,x_n)\\
&=\sum_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{n+1-m}{m}}x_n-\lambda_n n x_n\\
&\le 0,
\end{aligned}
$$

引理得证.

下证 $f_i(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调不增.

记 $A^2=x_{i+1}^2+\cdots+x_n^2$, 则

$$f_i(t)=\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{(i+1-m)t^2+A^2}{m}}-\lambda_n it+g(x_{i+1},\cdots,x_n),$$

其中 $g(x_{i+1},\cdots,x_n)$ 与 t 无关. 所以

$$
\begin{aligned}
f_i'(t)=&\sum_{m=1}^{i}\frac{2(i+1-m)t}{2\sqrt{\frac{(i+1-m)t^2+A^2}{m}}}-\lambda_n i\\
<&\sum_{m=1}^{i}\frac{(i+1-m)t}{\sqrt{\frac{(i+1-m)t^2}{m}}}-\lambda_n i\\
=&\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{m}{i+1-m}}-\lambda_n i\\
=&\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}-\lambda_n i\\
\le&0.
\end{aligned}
$$

综上, 引理 1 得证. □

引理 2. 对任意正整数 i, 均有

$$\frac{1}{i}\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}<\frac{\pi}{2}.$$

证明 当 $i=1$ 时显然成立, 下设 $i\ge 2$.

因为函数 $y=\sqrt{\frac{i+1-x}{x}}$ 在 $(0,i+1)$ 上单调递减, 所以

$$\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}=\sqrt{i}+\sum_{m=2}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}<\sqrt{i}+\int_1^{i+1}\sqrt{\frac{i+1-x}{x}}\ \mathrm{d}x.$$

令 $x=(i+1)\sin^2\theta$, 记 $\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{i+1}}$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_1^{i+1}\sqrt{\frac{i+1-x}{x}}\ \mathrm{d}x=&\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \mathrm{d}(i+1)\sin^2\theta\\
=&2(i+1)\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\ \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta\\
=&(i+1)\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right)\Bigg|_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\\
=&(i+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\alpha\right)\\
<&(i+1)\left(\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\right)\\
=&(i+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{i}}{i+1}-\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)\\
=&(i+1)\frac{\pi}{2}-\sqrt{i}-\sqrt{i+1}.
\end{aligned}
$$

所以
$$\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}<(i+1)\frac{\pi}{2}-\sqrt{i+1}<i\cdot\frac{\pi}{2},$$
其中最后一步用到了 $i\geq 2$.

综上, 引理 2 得证. □

现在我们来证明定理.

一方面, 由引理 1 和引理 2, 对任意正整数 n,
$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\leq\lambda_n\sum_{i=1}^{n}x_i<\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$
令 $n\to\infty$ 即知 $C=\frac{\pi}{2}$ 时不等式成立.

另一方面, 取 $x_1=x_2=\cdots=x_i=t,x_{i+1}=x_{i+2}=\cdots=\varepsilon$, 则当 $\varepsilon\to 0$ 时,
$$C\geq\frac{1}{i}\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}.$$
又类似引理 2 的证明,
$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\sum_{m=1}^{i}\sqrt{\frac{i+1-m}{m}}>&\frac{1}{i}\int_{1}^{i+1}\sqrt{\frac{i+1-x}{x}}\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{i+1}{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\alpha\right)\\ >&\frac{i+1}{i}\left(\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\cos\alpha-\tan\alpha\right)\\ =&\frac{i+1}{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{i}}{i+1}-\frac{1}{\sqrt{i}}\right)\\ \to&\frac{\pi}{2}(i\to+\infty),\end{aligned}$$
所以 $C\geq\frac{\pi}{2}$.

综上, 定理证毕. □