2020 伊朗 TST (第一轮) 解答与评析

梁敬勋

(浙江杭州学军中学, 310012)

指导老师: 边红平

伊朗数学奥林匹克国家队选拔一般有三轮共 18 个题. 伊朗的试题总体质量很高, 有些题目难度极大, 总是给我们的竞赛选手留下深刻的印象.

本文是 2020 年伊朗国家队选拔赛 (第一轮) 试题的解答. 由于能力有限, 难免有不当疏漏之处, 敬请读者批评指正.

I. 试题

1. 给一个完全图的每条边赋上互不相同的正数, 使得对于图中任意一个三角形, 其某一边上的数字等于另外两边上的数字之和. 证明: 可以给这个图的每个顶点赋值, 使得每条边上的数字等于这条边两个端点上的数字之差(的绝对值).

2. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O. D, E 分别在边 AC, AB 上, P, Q, R, S 是平面上的点, 满足 P, R 和 C 在直线 AB 的异侧, Q, S 和 B 在直线 AC 的异侧, 且 D, A, P, R 共圆, E, A, Q, S 共圆, $\triangle BCE \sim \triangle ADQ, \triangle CBD \sim \triangle AEP$(顶点按此顺序对应), $\angle ARE = \angle ASD = \angle BAC$.若 $RS \parallel PQ$, 证明: RE, DS, AO 三线共点.

3. 我们定义一个正整数 n 是"有趣的", 如果对 $1, 2, \cdots, n$ 的任意排列 σ, 都存在多项式 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 和 $\varepsilon > 0$, 满足:

1) $P_1(0) = P_2(0) = \cdots = P_n(0)$

2) $\forall -\varepsilon < x < 0, P_1(x) > P_2(x) > \cdots > P_n(x)$

3) $\forall 0 < x < \varepsilon, P_{\sigma(1)}(x) > P_{\sigma(2)}(x) > \cdots > P_{\sigma(n)}(x)$

求所有"有趣的"正整数 n.

4. 函数 $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 满足如下性质: 将区间 $[0, 1]$ 任意分成两个不交的非空

集合 A, B, 一定存在 $x \in A, g(x) \in B$ 或存在 $x \in B, g(x) \in A$. 且 $\forall x \in [0,1]$, 有 $g(x) > x$.证明: 存在无穷多个 $x \in [0,1]$ 使得 $g(x) = 1$.

5. 给定整数 k, 证明存在无穷多互异正整数对 (m, n) 满足:

$$n + s(2n) = m + s(2m), kn + s(n^2) = km + s(m^2),$$

其中 s 是数码和函数.

6. 给定 n 个正数, 是否一定可以找到一个凸 $n+2$ 边形和它的一个三角剖分, 使得剖分三角形的直径（即三角形的最长边）为给定的 n 个正数.

II. 解答

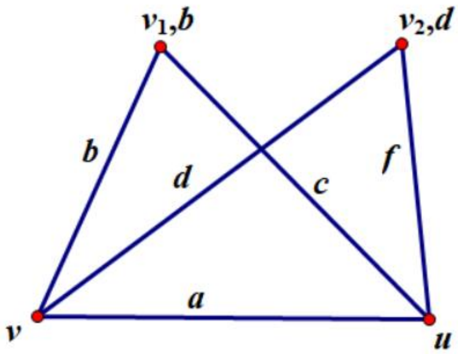
1. 给一个完全图的每条边赋上互不相同的正数, 使得对于图中任意一个三角形, 其某一边上的数字等于另外两边上的数字之和. 证明: 可以给这个图的每个顶点赋值, 使得每条边上的数字等于这条边两个端点上的数字之差(的绝对值).

证明. 设赋值最大的边为 $e = uv$, 赋值为 a.

我们给顶点作如下赋值: 给点 v 赋值 0. 对 $\forall v' \in V, v' \neq v$, 给 v' 赋的值等于 vv' 的赋值.

下证该赋值满足要求.

任取 $v_1, v_2 \in V, v_1, v_2 \neq u, v$. 首先 u 的赋值为 a. 设 vv_1, uv_1, vv_2, uv_2 赋值分别为 b, c, d, f. 则 v_1, v_2 赋值为 b, d.



我们验证:

(1) uv_1 赋值 $c = |a-b|$, uv_2 赋值 $f = |a-d|$.

(2) v_1v_2 赋值为 $|b-d|$.

(1): 在 $\triangle uvv_1$ 中, 由 a 的最大性, $a = b + c$. 同理, $a = d + f$. 故 (1) 成立.

(2): $\triangle vv_1v_2$ 中, 若 v_1v_2 赋值非 $|b-d|$, 则只能为 $b+d$. 考察 $\triangle uv_1v_2$, 要么 $b + d = c + f$, 要么 $b + d = |c - f|$.

若为前者, 结合 $b + c = a = d + f$ 知 $b = f$, 与各边赋值不同矛盾!

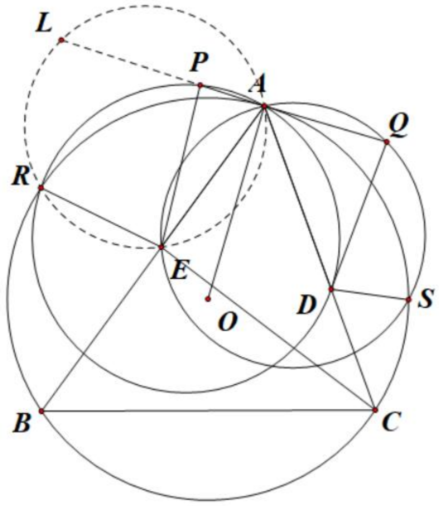
若为后者, 则 $b + d = |c - f| = |b - d|$, 与 $b, d > 0$ 矛盾!

故 v_1v_2 赋值为 $|b-d|$.

综上, 该赋值符合. □

注. 顶点的赋值几乎是确定的, 要描述顶点的赋值, 只需知道相互之间的大小. 故希望找一个最小元, 取赋值最大的边可以定位极大元与极小元.

2. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O. D,E 分别在边 AC,AB 上, P,Q,R,S 是平面上的点, 满足 P,R 和 C 在直线 AB 的异侧, Q,S 和 B 在直线 AC 的异侧, 且 D,A,P,R 共圆, E,A,Q,S 共圆, $\triangle BCE \sim \triangle ADQ, \triangle CBD \sim \triangle AEP$(顶点按此顺序对应), $\angle ARE = \angle ASD = \angle BAC$.若 $RS \parallel PQ$, 证明: RE, DS, AO 三线共点.



证明. 我们证明 $R,S \in \odot O$.

由 $\angle PAE = \angle DCB$ 可知, PA 与 $\odot O$ 相切, 即 $PA \perp AO$. 同理, $QA \perp AO$. 故 P,A,Q 共线. 设直线 AP 交 $\odot ARE$ 于点 A,L, 则 $\angle ALE = \angle ARE$. 所以 $\angle ALE = \angle CAB$, 又 $\angle LAE = \angle ACB$ 知 $\triangle AEL \sim \triangle CBA$, 且 P,D 为对应点. 注意到

$$\angle RLA = \angle RLE + \angle ELA = \angle RAE + \angle EAC = \angle RAC,$$

又 $\angle RPL = \angle RDA$, 故 $\triangle RLP \sim \triangle RAD$. 由 $\triangle AEL \sim \triangle CBA$ 及 P,D 的对应关系, 结合上述相似知 D,P 也为该相似的对应点. 故 $\triangle RAP \sim \triangle RCD$. 从而

$$\angle PAR = \angle ACR \Rightarrow PA \text{ 与 } \odot(CAR) \text{ 相切} \Rightarrow R \in \odot O.$$

同理, $S \in \odot O$.

现在, $RS \parallel PQ$, 故 $RS \perp AO$, 从而 $AR = AS$. 又

$$\angle ERS = \angle ERA - \angle ARS = \angle DSA - \angle ASR = \angle DSR,$$

故 RE, SD 交在 RS 中垂线 AO 上, 得证! □

注. 本题难以画出标准圆, 故退而求其次, 先不看 $PQ \parallel RS$, 分析图形的性质. 此时作标准圆即可发现 $R, S \in \odot O$.

3. 我们定义一个正整数 n 是"有趣的", 如果对 $1, 2, \cdots, n$ 的任意排列 σ, 都存在多项式 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 和 $\varepsilon > 0$, 满足:

1) $P_1(0) = P_2(0) = \cdots = P_n(0)$

2) $\forall -\varepsilon < x < 0, P_1(x) > P_2(x) > \cdots > P_n(x)$

3) $\forall 0 < x < \varepsilon, P_{\sigma(1)}(x) > P_{\sigma(2)}(x) > \cdots > P_{\sigma(n)}(x)$

求所有"有趣的"正整数 n.

解. 所求有趣的正整数 n 为 $1, 2, 3$.

对一个非零多项式 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$, 称使 $a_k \neq 0$ 的最小的 k 对应的项 $a_k x^k$ 称为 f 的"特征". 显然, $|x|$ 充分小时 $f(x)$ 的正负取决于 f 的特征的正负.

首先, $n \geq 4$ 是不符合的. 为此, 容易看出仅需证 $n = 4$ 的情形.

取 σ 使: $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$. 下证不存在符合的 P_1, P_2, P_3, P_4 及 $\varepsilon > 0$.

反证法, 假设存在符合的 P_1, P_2, P_3, P_4 及正数 ε. 记

$$Q_1 = P_3 - P_1, Q_2 = P_1 - P_4, Q_3 = P_4 - P_2,$$

则 $x > 0$ 且 x 充分小时, Q_1, Q_2, Q_3 均为正值. 设 Q_1, Q_2, Q_3 的特征依次为 $c_1 x^{\alpha_1}, c_2 x^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}$, 则 $c_1, c_2, c_3 > 0$. 据此 $\varepsilon_1 Q_1 + \varepsilon_2 Q_2 + \varepsilon_3 Q_3$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0, 1\}$ 且不全为 0) 的特征的次数必为 α_1 或 α_2 或 α_3, 即不会出现最低次项相互抵消的情况.

① $\alpha_1 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 则由于 $-\varepsilon < x < 0$ 时,

$$P_3(x) - P_4(x) > 0 \Rightarrow Q_1(x) + Q_2(x) > 0 \Rightarrow x^{\alpha_1} > 0,$$

$$P_2(x) - P_3(x) > 0 \Rightarrow Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) < 0 \Rightarrow x^{\alpha_1} < 0,$$

矛盾!

② $\alpha_2 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 类似地, $-\varepsilon < x < 0$ 时,

$$P_3(x) - P_4(x) > 0 \Rightarrow Q_1(x) + Q_2(x) > 0 \Rightarrow x^{\alpha_2} > 0,$$

$$P_2(x) - P_3(x) > 0 \Rightarrow Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) < 0 \Rightarrow x^{\alpha_2} < 0,$$

矛盾!

③ $\alpha_3=\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 则 $-\varepsilon<x<0$ 时,

$$0<P_1(x)-P_2(x)=Q_2(x)+Q_3(x)\Rightarrow x^{\alpha_3}>0,$$

$$0>P_3(x)-P_2(x)=Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x)\Rightarrow x^{\alpha_3}<0,$$

矛盾!

综上, $n\geq 4$ 不符合.

另一方面, 显然 $n=1,2$ 是符合的, 下验证 $n=3$ 符合. 取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$.

(1) $\sigma(1)=1,\sigma(2)=2,\sigma(3)=3$, 取 $P_1(x)=x^4+x^2,P_2(x)=x^2,P_3(x)=0$.

(2) $\sigma(1)=1,\sigma(2)=3,\sigma(3)=2$, 取 $P_1(x)=x^3+x^2,P_2(x)=0,P_3(x)=x^3$.

(3) $\sigma(1)=2,\sigma(2)=1,\sigma(3)=3$, 取 $P_1(x)=x^2,P_2(x)=x^2+x^3,P_3(x)=0$.

(4) $\sigma(1)=2,\sigma(2)=3,\sigma(3)=1$, 取 $P_1(x)=0,P_2(x)=x+x^2,P_3(x)=x$.

(5) $\sigma(1)=3,\sigma(2)=1,\sigma(3)=2$, 取 $P_1(x)=x^2,P_2(x)=0,P_3(x)=x^2+x$.

(6) $\sigma(1)=3,\sigma(2)=2,\sigma(3)=1$, 取 $P_1(x)=0,P_2(x)=x,P_3(x)=x+x^3$.

综上, 所求的有趣数为 $1,2,3$. □

注. 本题容易想到用差分的特征来判断正负. 但是引入 $Q_i=P_{\sigma(i)}-P_{\sigma(i+1)}$ 会使 P_i-P_{i+1} 表示起来不方便. 本题的关键是各 Q_i 的特征都是正系数的, 从而使加式中特征不会相互抵消, 使得 P_i-P_{i+1} 有可能研究.

4. 函数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足如下性质: 将区间 $[0,1]$ 任意分成两个不交的非空集合 A,B, 一定存在 $x\in A,g(x)\in B$ 或存在 $x\in B,g(x)\in A$. 且 $\forall x\in[0,1]$, 有 $g(x)>x$. 证明: 存在无穷多个 $x\in[0,1]$ 使得 $g(x)=1$.

证明. 反证法, 若仅有有限个 $x\in[0,1]$ 使 $g(x)=1$, 记这些 x 组成集合 S.

首先, $S\neq\emptyset$. 否则, 取 $A=\{1\},B=[0,1)$, 由题意, 要么存在 $x\in A,g(x)\in B$ 或存在 $x\in B,g(x)\in A$. 注意到 $g(x)>x,\forall x\in[0,1]$. 故存在 $x\in B,g(x)\in A$, 此时 $g(x)=1$, 矛盾!

其次, 由 $g(x)>x,\forall x\in[0,1]$, 知 $1\notin S$.

设 S 的最大元为 α. 取

$$A=\{x\mid x\in[0,1]\text{ 且存在 }k\in\mathbb{N}^*\text{ 使 }g^{(k)}(x)=1\},$$

其中 $g^{(k)}=\underbrace{g\circ\cdots\circ g}_{k\text{ 个 }g}$. 则 A 非空集, 记 $A^*=A\cup\{1\}$.

任取 $x\in A$, 有

$$g^{(k)}(x)=1\Rightarrow g^{(k-1)}(x)\leq\alpha\Rightarrow x\leq\alpha<1,$$

取 $B=[0,1]\backslash A^*$, 则 $B\neq\emptyset$. 由题意, 要么存在 $x\in A^*, g(x)\in B$ 或存在 $x\in B, g(x)\in A^*$.

若为前者, 由 $x\in A^*$, 设 $g^{(k)}(x)=1$ (显然 $x\neq 1$), $k\in\mathbb{N}^*$. 由 $1\notin B$ 知, $k\geq 2$. 故 $g^{(k-1)}(g(x))=1$, 从而 $g(x)\in A$, 矛盾!

若为后者, 由 A 的定义知, $g(x)\neq 1$. 由 $g(x)\in A$, 设 $g^{(k)}(g(x))=1, k\in\mathbb{N}^*$, 即 $g^{(k+1)}(x)=1$, 故 $x\in A$, 矛盾!

综上, 反证假设不成立, S 为无限集. □

注. 要充分利用条件必须取刁钻的 A, B. 因此想到反证法就很容易.

5. 给定整数 k, 证明存在无穷多互异正整数对 (m,n) 满足:

$$n+s(2n)=m+s(2m), kn+s(n^2)=km+s(m^2),$$

其中 s 是数码和函数.

证明. 首先注意到一个事实:

设 $n\in\mathbb{N}^*$, n 的个位数不是 0 和 5, $t\in\mathbb{N}^*, 10^t>2n$, 则

$$s(10^t-n)=9t+1-s(n), s(2(10^t-n))=9t+2-s(2n). \quad ①$$

事实上, 设 $n=(\overline{a_1a_2\cdots a_t})_{10}, a_i\in\mathbb{N}, 0\leq a_i\leq 9$, 则 $a_t\neq 0$. 从而

$$10^t-n=\left(\overline{(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{t-1})(10-a_t)}\right)_{10}.$$

设 $2n=(\overline{b_1b_2\cdots b_t})_{10}$,

$$2(10^t-n)=2\cdot 10^n-2n=\left(\overline{1(9-b_1)(9-b_2)\cdots(9-b_{t-1})(10-b_t)}\right)_{10}.$$

于是, ① 成立.

对 $k\in\mathbb{Z}$, 记

$$S_k=\{(m,n)\,|\,m,n\in\mathbb{N}^*, m\neq n \text{ 且 } n+s(2n)=m+s(2m), kn+s(n^2)=km+s(m^2)\}.$$

原命题即证 S_k 为无限集.

下面引入两个变换. 这两个变换都只是针对 S_k 的部分元素.

对 $(m,n)\in S_k$, m 与 n 的个位数都不是 0 和 5, $t\in\mathbb{N}^*, 10^t>m^2+n^2, 10^t>2m, 10^t>2n$ 定义 $\Gamma_{1,t}: S_k\to S_{k+1}$ 为

$$\Gamma_{1,t}(m,n)=(10^t+m, 10^t+n).$$

我们证明 $(10^t+m, 10^t+n)\in S_{k+1}$.

事实上,

$$10^t+m+s(2(10^t+m))=10^t+2+m+s(2m)=10^t+n+s(2(10^t+n)),$$

且有

$$
\begin{aligned}
&(k+1)(10^t+m)+s\left((10^t+m)^2\right)\\
=&(k+1)10^t+(k+1)m+s\left(10^{2t}+2m\cdot 10^t+m^2\right)\\
=&(k+1)10^t+(k+1)m+s(m^2)+1+s(2m)\\
=&(k+1)10^t+[m+s(2m)]+\left[km+s(m^2)\right]+1\\
=&(k+1)10^t+[n+s(2n)]+\left[kn+s(n^2)\right]+1\\
=&(k+1)10^t+(k+1)n+s(n^2)+1+s(2n)\\
=&(k+1)(10^t+n)+s\left((10^t+n)^2\right).
\end{aligned}
$$

对 $(m,n)\in S_k$, m 与 n 的个位数不是 0 和 5, $t\in\mathbb{N}^*, 10^t>m^2+n^2, 10^t>2m, 10^t>2n, (10,mn)=1$, 定义 $\Gamma_{2,t}:S_k\to S_{1-k}$ 为

$$\Gamma_{2,t}(m,n)=(10^t-m,10^t-n).$$

此时, $10\nmid 10^t-m, 10\nmid 10^t-n$. 我们证明 $(10^t-m,10^t-n)\in S_{1-k}$. 事实上, 仅需注意到

$$10^t-m+s(2(10^t-m))=10^t-m+9t+2-s(2m)=10^t-n-s(2(10^t-n))$$

且

$$
\begin{aligned}
&(1-k)(10^t-m)+s\left((10^t-m)^2\right)\\
=&(1-k)(10^t-m)+s(10^{2t}-2m\cdot 10^t+m^2)\\
=&(1-k)(10^t-m)+9t+1-s(2m)+s(m^2)\\
=&(1-k)10^t+(km+s(m^2))-(m+s(2m))+9t+1\\
=&(1-k)10^t+(kn+s(n^2))-(n+s(2n))+9t+1\\
=&(1-k)(10^t-n)+s\left((10^t-n)^2)\right)
\end{aligned}
$$

现在, 注意到 $(9,12)\in S_0$, 即有

$$9+s(18)=12+s(24)=18, s(81)=s(144)=9.$$

$k>0$ 时, 取充分大的 t, 对 $(9,12)$ 依次作用 $\Gamma_{1,t},\Gamma_{1,3t},\cdots,\Gamma_{1,3^{k-1}t}$, 得到的像即在 S_k 中, 从而取不同的 t 即得: S_k 有无穷个元素.

对 $k\le 0$, 则 $1-k>0$. 取 $(m,n)\in S_{1-k}$, 由前述知 S_{1-k} 为无限集. t 充分大时, 有 $\Gamma_{2,t}(m,n)\in S_k$, 取不同的 t 即知: S_k 为无限集. □

注. 本题要同时控制 $s(2n)$ 与 $s(n^2)$, 恐怕难以直接构造, 但递归结构很强. 另外, 由于 $n+s(2n)=m+s(2m)$, 故 m,n 很接近, 这引导我们用形如 “10^k+n”

的递归构造.

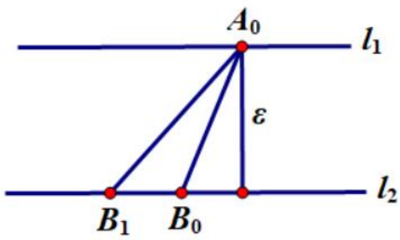
6. 给定 n 个正数, 是否一定可以找到一个凸 $n+2$ 边形和它的一个三角剖分, 使得剖分三角形的直径（即三角形的最长边）为给定的 n 个正数.

解. 答案是肯定的.

设给定的 n 个正数为 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. 作两条平行的直线 l_1, l_2, 其距离为 $\varepsilon(>)0$ 待定. 取 $A_0 \in l_1$, 并在 l_2 上取 B_0, B_1, 使得

$$A_0B_0 = \frac{a_1}{2}, A_0B_1 = a_1.$$

注意到只要 $\varepsilon < \frac{a_1}{2}$, 这就是可行的, 并约定 B_0, B_1 尽量靠左(如图).



待定充分小的 $\varepsilon' > 0, \delta > 0$.

之后归纳地确定其余 A_i, B_j.

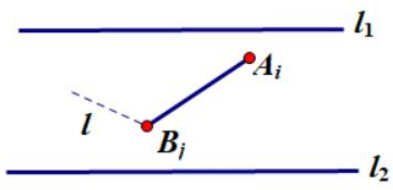
假设已有 $A_0, A_1, \cdots, A_i; B_0, B_1, \cdots, B_j$, 使得:

① 其可剖分出 $i+j$ 个三角形, 直径依次为 $a_1, \cdots, a_{i+j}$.

② 其均在 l_1, l_2 内侧, 且 ε', δ 充分小时, 各 A_i 趋于 l_1, 各 B_j 趋于 l_2, 其在 l_1 或 l_2 上的投影依次向左分布.

③ A_kA_{k+1} 与 l_1 的夹角为 $k\delta(1 \le k \le i-1)$, B_kB_{k+1} 与 l_2 的夹角为 $k\delta(1 \le k \le j-1)$ 且 $A_kA_{k+1} = \varepsilon'$.

下取一点 C, 其要么作为 A_{i+1}, 要么作为 B_{j+1} 且使 $\triangle CA_iB_j$ 直径为 a_{i+j+1}, 且 ②, ③ 仍满足.



首先, δ, ε' 充分小时, 由 ②, ③, $A_0A_i \le i\varepsilon'$ 可任意小, 但

$$A_0B_j \ge A_0B_0 = \frac{a_0}{2},$$

故可取 δ, ε' 使 B_j 在 l_2 投影在 A_i 相应投影的左侧. 现过 B_j 向上作射线 l, 其与 l_2 夹角为 $j\delta$. 注意到 $A_iB_j \le a_{i+j}$.

i). 若 $A_iB_j=a_{i+j+1}$. 这要求 $a_{i+j}=a_{i+j+1}$. 则取 C 为 A_{i+1}. 使 $A_{i+1}A_i=\varepsilon'$ 且 $A_{i+1}A_i$ 与 l_1 夹角为 $i\delta, d(A_{i+1},l_1)>d(A_i,l_1)$. 这样, ②, ③ 满足且 $\triangle A_iB_jA_{i+1}$ 直径为 $A_iB_j=a_{i+j+1}$, 因为 $\angle B_jA_{i+1}A_i$ 为钝角(由 ②, ③ 保证).

ii). 若 $A_iB_j<a_{i+j+1}$, 则取 C 为 B_{j+1}. 令 $C\in l$, 则 ③ 成立. 设 $B_jC=x$, 则欲让 $A_iC=a_{i+j+1}$, 仅需

$$a_{i+j+1}^2=a_{i+j}^2+x^2-2a_{i+j}x\cos\angle A_iB_jB_{j+1}.$$

上式右边关于 x 单增, 在 $x\to 0^+$ 时小于左边; 在 $x\to+\infty$ 时大于左边, 故有解 x, 且 $0<x<a_{i+j+1}$(注意 ②, ③ 保证 ε,δ 充分小时, $\angle A_iB_jB_{j+1}$ 为钝角). 则 $\triangle A_iB_jB_{j+1}$ 直径为 a_{i+j+1}, 且 $x\sin\delta\to 0$(当 $\delta\to 0^+$), 故 ② 成立.

由归纳原理, 我们定义了 $n+2$ 个点, 其满足 ①, ②, ③, 易知其为凸 $n+2$ 边形的顶点集. 由 ① 知符合题意. 得证. $\square$

注: 本题难度不大, 表达难度很高. 在构思过程中, 首先是要将“剖分”化为“拼接”. 凸性实际上是要求内角小于 180°. 故容易想到考虑出一个顶点外, 其余顶点几乎共线的多边形. 但 $a_i=a_{i+1}$ 时会出问题, 因此需要加入一些“反向”的三角形.