一个球面点集划分问题

尹顺　王琇
(湖南师范大学附属中学, 410006)
指导教师: 汤礼达

2020 年美国湾区数学竞赛的最后一题是:

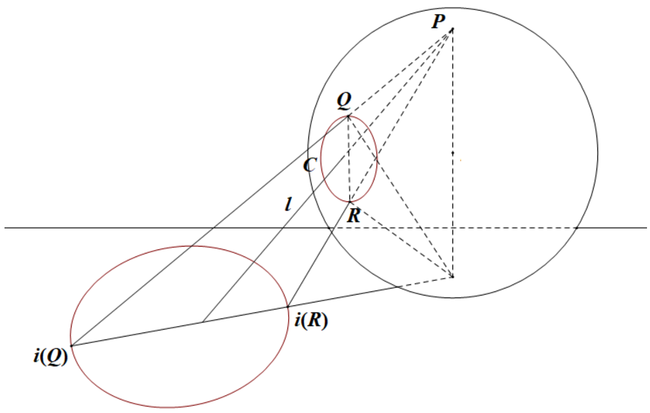
问题 设 a, b 为非负整数, S 为球面 Ω 上 $a+b+3$ 个点的集合, 其中任意四点不共面. 求有多少个平面经过 S 中三点, 使得其将 S 中剩余的点分为一侧 a 个点, 另一侧 b 个点?

证明 先证明原问题等价于如下的平面问题:

问题* 设 T 为平面上 $a+b+3$ 个点的集合, 其中任意三点不共线, 任意四点不共圆. 称 T 的一个三元子集是好的, 如果经过这三点的圆的内部恰有 T 中 a 个或 b 个点. 求好的三元子集数目.

任取 Ω 上一点 P, 使得 P 不与 S 中任意三点共面, 且 P 与球心的连线不垂直于过 S 中任意三点的平面. 考虑经过 P 的对径点且与球面相切的平面 Γ. 定义映射 $i: \Omega \backslash \{P\} \to \Gamma$ 如下: 对 Ω 上任意异于点 P 的一点 Q, $i(Q)$ 为直线 PQ 与 Γ 的交点.

我们说明对 Ω 上的任意一个圆周 C, 其在 i 下的像仍然是一个圆.



修订日期: 2020-04-27.

事实上, 注意所有形如 $PX(X\in C)$ 的直线形成一个椭圆锥面 F, 且 C 所在平面 Γ_1 截 F 得一个圆. 设 C 上距离点 P 最近和最远的两点分别为 Q,R (由 P 的选取知这样的点唯一存在), 则 $P,Q,R,i(Q),i(R)$ 共面, 且由射影定理有

$$PQ\cdot Pi(Q)=(d(P,\Gamma))^2=PR\cdot Pi(R).$$

因此 $\triangle PQR\sim\triangle Pi(R)i(Q)$, 从而 $\angle RPQ$ 的平分线 ℓ 与直线 $QR,i(Q)i(R)$ 的夹角相等.

注意到 F 关于 ℓ 轴对称, 因此由上述夹角相等以及对称性知 F 被 Γ,Γ_1 所截图形相似. 因为 Γ_1 截 F 得一个圆, 故 Γ 截 F 所得图形, 即 C 在 i 下的像, 也是一个圆.

于是原问题等价于在平面 Γ 上对点集 $T=i(S)$ 考虑问题*.

先通过一个特例求好的三元子集数目. 在平面直角坐标系 xOy 中, 令

$$T=\{A_i(x_i,x_i^2)\mid 1\leqslant i\leqslant a+b+3\},$$

其中 $0<x_1<\cdots<x_{a+b+3}$. 则直线 A_iA_j 斜率为 $k_{ij}=\frac{x_i^2-x_j^2}{x_i-x_j}=x_i+x_j$.

对 $i<j<t$, 有

$$\tan\angle A_iA_tA_j=\frac{k_{jt}-k_{it}}{1+k_{jt}k_{it}}=\frac{x_j-x_i}{1+(x_j+x_t)(x_i+x_t)}(>0),$$

从而若固定 $i<j$, 则 $\angle A_iA_tA_j(t>j)$ 关于 t 递减. (1)

类似地, 对 $\ell<i<j$,

$$\tan\angle A_iA_\ell A_j=\frac{x_j-x_i}{1+(x_j+x_\ell)(x_i+x_\ell)}(>0),$$

故若固定 $i<j$, 则 $\angle A_iA_\ell A_j(\ell<i)$ 关于 ℓ 递减. (2)

因此对任意 $i<j<k$, 当点 X 在抛物线的弧 OA_i (这里及以下, 所说的抛物线的弧均指不含端点)上时, 由 (2) 知 $\angle A_jXA_k>\angle A_jA_iA_k$, 故弧 OA_i 在 $\odot(A_iA_jA_k)$ 内部.

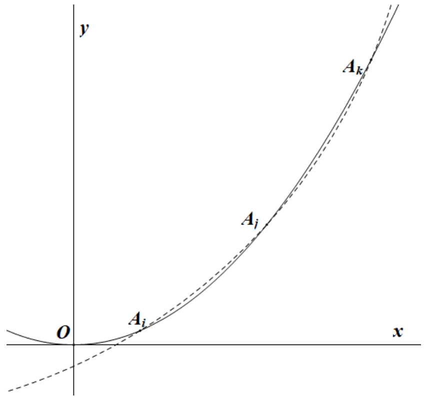
类似地由 (2) 可知弧 A_jA_k 在 $\odot(A_iA_jA_k)$ 内部, 而由 (1) 可知弧 A_iA_j 以及 A_k 右侧的抛物线在 $\odot(A_iA_jA_k)$ 外部.

由此可知 $\{A_i,A_j,A_k\}$ 为好的三元子集当且仅当弧 OA_i,A_jA_k 上一共恰有 a 或 b 个已知点, 也即 $(i-1)+(k-j-1)=a$ 或 b.

若 $(i-1)+(k-j-1)=a$, 则 $i\leqslant a+1$. 对每个取定的 i, 应有

$$i+1\leqslant j\leqslant(a+b+3)+i-a-2=b+i+1,$$

故 j 有 $b+1$ 种取值, 其中每个取值都对应着相应的一组满足要求的 $\{i,j,k\}$, 共 $(a+1)(b+1)$ 组.



同理恰有 $(a+1)(b+1)$ 组 $\{i,j,k\}$ 满足 $(i-1)+(k-j-1)=b$, 因此这时好的三元子集数目为

$$\begin{cases}2(a+1)(b+1), 若 a\neq b,\\ (a+1)(b+1), 若 a=b.\end{cases}$$

最后说明对任意一般的 T, 均可以适当对其进行操作化为上述特例, 而不改变好的三元子集数目. 这只需证明任取 T 中一个点 U, 对其适当进行移动时不会改变好的三元子集的数目.

我们将 $T\backslash\{U\}$ 中任两点确定的直线以及任三点确定的圆取出, 再取出所有这些图形两两之间的全体交点, 这些交点只有有限个.

任意取定一个方向, 使得 U 沿此方向移动时不经过上述交点中的任意一个. $(*)$

下面证明当 U 沿此方向移动到任意位置(使得 T 中无三点共线或四点共圆, 将这称作"合理位置")时, 好的三元子集数目不变.

在运动过程中定义两种"临界状态": 有四点共圆时称为临界状态 I, 有三点共线时称为临界状态 II. 点 U 从初始时间 $t_0=0$ 开始匀速移动, 如果任一时刻点 U 不在合理位置, 则此刻必然产生某类临界状态.

易知若 U 从一个合理位置移动到另一个合理位置时没有产生过临界状态, 则好的三元子集数目不变. 下面假设有临界状态产生, 由方向的选取满足 $(*)$ 知两种临界状态不会同时产生, 因此只要考虑恰产生一次临界状态的情况.

设在 t_1 时刻产生了临界状态, 对临界状态的类型分类讨论.

1. I 型临界状态. 设 t_1 时刻 U 与 T 中另外三点 A,B,C 共圆, 且这时 $\odot(UABC)$ 内部有 $r(r\in\mathbb{N})$ 个已知点. 结合 $(*)$ 可知存在 $\varepsilon>0$, 使得在 $[t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon]$ 中任意时刻, 对任意过 T 中三点且异于 $\odot(UABC)$ 的圆, 其内部的 T 中元素数目恒为常数; 同时 U,A,B,C 的凸包恒为四边形, 不妨设四点即

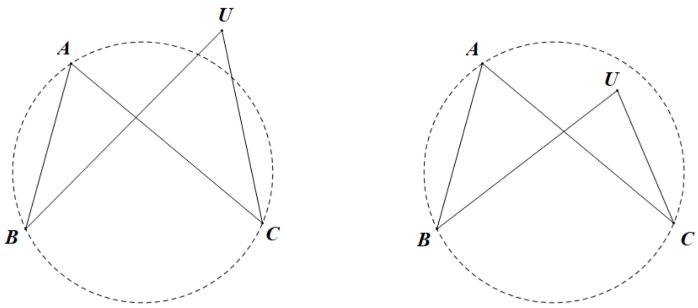
按此顺序作为凸四边形的四个顶点.

在 $t_1-\varepsilon$ 时刻, U 在 $\odot(ABC)$ 外, 从而 $\angle BAC>\angle BUC$. 于是 $\odot(ABC)$ 内部点数为 r, $\odot(UBC)$ 内部点数为 $r+1$.

同时此时 $\angle ABU\neq\angle ACU$, 故 $\odot(UAB)$ 和 $\odot(UAC)$ 内部点数为 $r,r+1$ (不一定按照这个顺序).

类似地, 在 $t_1+\varepsilon$ 时刻, U 在 $\odot(ABC)$ 内, 从而 $\angle BAC<\angle BUC$. 于是 $\odot(ABC)$ 内部点数为 $r+1$, $\odot(UBC)$ 内部点数为 r, 而 $\odot(UAB)$ 和 $\odot(UAC)$ 内部点数为 $r,r+1$ (不一定按照这个顺序).

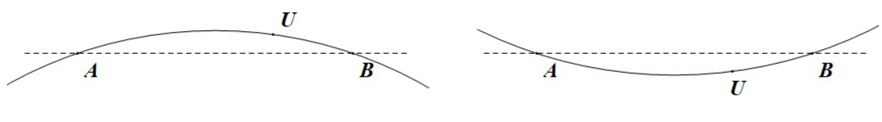
由此可见好的三元子集数目不发生改变.



2. II 型临界状态. 设 t_1 时刻 U 与 T 中另外两点 A,B 共线. 则结合 $(*)$ 可知存在 $\varepsilon>0$, 使得在 $[t_1-\varepsilon,t_1)\cup(t_1,t_1+\varepsilon]$ 中任意时刻, 对任意过 T 中三点且异于 $\odot(UAB)$ 的圆, 其内部的点数恒为常数; 同时 $\odot(UAB)$ 内部的已知点恰好为直线 AB 某侧(除 U 外)的全体已知点.

由于直线 AB 两侧除 U 外已知点数目之和为 $a+b$, 因此在 $t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon$ 两时刻, $\{U,A,B\}$ 要么同时是好的三元子集, 要么同时不是.

因此这种情况下好的三元子集数目也不变.



综上, 在满足按照 $(*)$ 的前提下移动 T 中任意一点时, 好的三元子集数目不变. 对任意初始的 T, 容易经有限步这样的移动化归为特例中情形, 从而可知好的三元子集数目为

$$\begin{cases}2(a+1)(b+1), \text{若 } a\neq b,\\(a+1)(b+1),\ \text{若 } a=b.\end{cases}$$

评注 原问题在球面上考虑, 不利于思考几何图形的位置关系, 通过球极反演化为平面问题*后更加直观. 注意问题本身暗示答案与各点的位置无关, 这提示我们一方面可以通过研究特例得到答案, 另一方面对一般的点集有某种方式将其化归为特例.

特例的选取要求是便于计算好的三元子集数目, 这可以通过某种凸性达到, 因此我们选择抛物线上的点作为特例. 化归的办法是移动已知点, 其中的关键想法是将移动过程分解为若干个临界状态. 在离临界状态充分近的时刻, 点的移动对好的三元子集影响较小, 这为论证提供了方便.