一道国家队选拔考试题的加强

廖昱博

(中国人民大学附属中学,100080)

指导教师: 张端阳

2004 年中国国家队选拔考试的第三题 (余红兵教授提供 [1])是一道困难的整变量不等式:

问题 1 设整数 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, a, b 是正整数, 满足

$$\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right) \le \frac{a}{b} < \left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_{n-1}}\right).$$

求证:

$$a_1a_2\cdots a_n \le (4a)^{2^n-1}.$$

最近我们得到了该问题的最佳形式:

定理 设整数 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, a, b 是正整数, 满足

$$\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right) \le \frac{a}{b} < \left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_{n-1}}\right).$$

则

$$a_1a_2\cdots a_n \le \frac{(a+1)^{2^n}-(a+1)^{2^{n-1}}}{a}.$$

定理的证明借鉴了匈牙利数学家 Paul Erdös 已经被解决的一个猜想的证明思想, 这个猜想也是关于整变量不等式的, 曾被选作 1987 年中国国家队选拔考试的第三题:

问题 2 设数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = 2$, $r_n = r_1r_2\cdots r_{n-1}+1$, $n \ge 2$. 正整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} < 1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}.$$

修订日期: 2020-06-03.

其证明可以在 [2] 中第 124 页找到.

定理的证明　设数列 $\{t_n\}$ 满足 $t_n=(a+1)^{2^{n-1}}+1,\ n\geq 1$. 容易验证

$$t_1t_2\cdots t_n=\frac{(a+1)^{2^n}-1}{a}, \qquad ①$$

且

$$\left(1-\frac{1}{t_1}\right)\left(1-\frac{1}{t_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{t_{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{t_n-1}\right)=\frac{a}{a+1}. \qquad ②$$

下面对 n 用第二数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 由 $1-\frac{1}{a_1}\leq\frac{a}{b}<1$, 知 $1-\frac{1}{a_1}\leq\frac{a}{a+1}$, 所以 $a_1\leq a+1$ 成立.

假设结论对小于 n 的正整数都成立, 来看 n 时的情形.

假设此时结论不成立, 即

$$a_1a_2\cdots a_n>\frac{(a+1)^{2^n}-(a+1)^{2^{n-1}}}{a}.$$

任取 $1\leq i\leq n-1$, 因为

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{a_{i+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\leq&\frac{aa_1a_2\cdots a_i}{b(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_i-1)}\\&<\left(1-\frac{1}{a_{i+1}}\right)\left(1-\frac{1}{a_{i+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_{n-1}}\right),\end{aligned}$$

所以由归纳假设,

$$a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n\leq\frac{(aa_1a_2\cdots a_i+1)^{2^{n-i}}-(aa_1a_2\cdots a_i+1)^{2^{n-i-1}}}{aa_1a_2\cdots a_i},$$

进而

$$a_1a_2\cdots a_n\leq\frac{(aa_1a_2\cdots a_i+1)^{2^{n-i}}-(aa_1a_2\cdots a_i+1)^{2^{n-i-1}}}{a}.$$

若 $a_1a_2\cdots a_i\leq t_1t_2\cdots t_i$, 则由①,

$$aa_1a_2\cdots a_i+1\leq(a+1)^{2^i},$$

代入上式得,

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_n\leq&\frac{((a+1)^{2^i})^{2^{n-i}}-((a+1)^{2^i})^{2^{n-i-1}}}{a}\\=&\frac{(a+1)^{2^n}-(a+1)^{2^{n-1}}}{a},\end{aligned}$$

与反证假设矛盾! 故

$$a_1a_2\cdots a_i>t_1t_2\cdots t_i.$$

记 $t_n'=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{t_1t_2\cdots t_{n-1}}$, 则由

$$a_1a_2\cdots a_n>\frac{(a+1)^{2^n}-(a+1)^{2^{n-1}}}{a}=t_1t_2\cdots t_{n-1}(t_n-1),$$

得

$$t_n' > t_n - 1 > t_{n-1} > \cdots > t_2 > t_1.$$

至此, 我们有

$$a_1 > t_1,$$

$$a_1a_2 > t_1t_2,$$

$$\cdots$$

$$a_1a_2\cdots a_{n-1} > t_1t_2\cdots t_{n-1},$$

$$a_1a_2\cdots a_n = t_1t_2\cdots t_n'.$$

将以上 n 个式子取倒数后再取对数得,

$$\ln\frac{1}{a_1} < \ln\frac{1}{t_1},$$

$$\ln\frac{1}{a_1} + \ln\frac{1}{a_2} < \ln\frac{1}{t_1} + \ln\frac{1}{t_2},$$

$$\cdots$$

$$\ln\frac{1}{a_1} + \ln\frac{1}{a_2} + \cdots + \ln\frac{1}{a_{n-1}} < \ln\frac{1}{t_1} + \ln\frac{1}{t_2} + \cdots + \ln\frac{1}{t_{n-1}},$$

$$\ln\frac{1}{a_1} + \ln\frac{1}{a_2} + \cdots + \ln\frac{1}{a_n} = \ln\frac{1}{t_1} + \ln\frac{1}{t_2} + \cdots + \ln\frac{1}{t_n'}.$$

又由 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 知

$$\ln\frac{1}{a_1} > \ln\frac{1}{a_2} > \cdots > \ln\frac{1}{a_n};$$

由 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n'$ 知

$$\ln\frac{1}{t_1} > \ln\frac{1}{t_2} > \cdots > \ln\frac{1}{t_n'},$$

所以

$$\left(\ln\frac{1}{a_1},\ \ln\frac{1}{a_2},\ \cdots,\ \ln\frac{1}{a_n}\right) \prec \left(\ln\frac{1}{t_1},\ \ln\frac{1}{t_2},\ \cdots,\ \ln\frac{1}{t_n'}\right).$$

令函数 $f(x) = \ln(1-e^x)$, 则由

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(1-e^x)^2} < 0,$$

知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上是上凸函数. 于是由 Karamata 不等式,

$$f\left(\ln\frac{1}{a_1}\right)+f\left(\ln\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+f\left(\ln\frac{1}{a_n}\right) \geq f\left(\ln\frac{1}{t_1}\right)+f\left(\ln\frac{1}{t_2}\right)+\cdots+f\left(\ln\frac{1}{t_n'}\right),$$

即

$$\ln\left(1-\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\ge\ln\left(1-\frac{1}{t_1}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{t'_n}\right).$$

所以结合②,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\ge&\left(1-\frac{1}{t_1}\right)\left(1-\frac{1}{t_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{t'_n}\right)\\>&\left(1-\frac{1}{t_1}\right)\left(1-\frac{1}{t_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{t_{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{t_n-1}\right)\\=&\frac{a}{a+1}.\end{aligned}$$

这样,

$$\frac{a}{b}\ge\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)>\frac{a}{a+1},$$

从而 $b<a+1$, 这与 $\frac{a}{b}<1$ 矛盾!

另一方面, 当 $a_i=t_i(1\le i\le n-1)$, $a_n=t_n-1$, $b=a+1$ 时,

$$\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a}{b}<\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_{n-1}}\right),$$

且

$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{(a+1)^{2^n}-(a+1)^{2^{n-1}}}{a}.$$

因此当给定 n 和 a 时, 定理的结果是最佳的.

综上, 定理得证. □

值得一提的是, 用类似的思想也可以解决下面这道整变量不等式:

问题 3 设正整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 满足 $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_i}\right)<2$. 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_i}\right)\le2-\frac{1}{2^{2^n-1}}.$$

证明 设数列 $\{s_n\}$ 满足 $s_n=2^{2^{n-1}}$, $n\ge1$. 容易验证

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{s_i}\right)=2-\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n}.$$

下面只需对 n 用第二数学归纳法证明

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_i}\right)\le\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{s_i}\right).$$

当 $n=1$ 时, 由 $1+\frac{1}{a_1}<2$, 知 $a_1\ge2$, 所以

$$1+\frac{1}{a_1}\le1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{s_1}$$

成立.

假设结论对小于 n 的正整数都成立, 来看 n 时的情形.

假设此时结论不成立, 即

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)>\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\left(1+\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{s_n}\right).$$

由 $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)<2$ 且 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是正整数知,

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\le 2-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}.$$

又

$$\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\left(1+\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{s_n}\right)=2-\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n},$$

所以

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}<\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n},$$

即

$$a_1a_2\cdots a_n>s_1s_2\cdots s_n.$$

另一方面, 我们证明 $a_1a_2\cdots a_n\le s_1s_2\cdots s_n$, 从而得到矛盾.

不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$. 由归纳假设,

$$1+\frac{1}{a_1}\le 1+\frac{1}{s_1},$$

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\le\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\left(1+\frac{1}{s_2}\right),$$

$$\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\le\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\left(1+\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{s_{n-1}}\right).$$

又由反证假设,

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)>\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\left(1+\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{s_n}\right).$$

将以上 n 个式子取对数得,

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\le\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\le\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{s_2}\right),$$

$$\cdots$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{a_{n-1}}\right)\le\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{s_{n-1}}\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{s_n}\right).$$

由后两行, 知存在 $a_n'>a_n$, 使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{a_n'}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{s_n}\right).$$

又由 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n<a_n'$, 知

$$\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\ge\ln\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ge\cdots\ge\ln\left(1+\frac{1}{a_n'}\right);$$

由 $s_1\le s_2\le\cdots\le s_n$, 知

$$\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\ge\ln\left(1+\frac{1}{s_2}\right)\ge\cdots\ge\ln\left(1+\frac{1}{s_n}\right),$$

所以

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right),\ \cdots,\ \ln\left(1+\frac{1}{a_n'}\right)\right)\prec\left(\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right),\ \cdots,\ \ln\left(1+\frac{1}{s_n}\right)\right).$$

令函数 $f(x)=\ln(e^x-1)$, 则由 $f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}<0$, 知 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是上凸函数. 于是由 Karamata 不等式,

$$f\left(\ln\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\right)+\cdots+f\left(\ln\left(1+\frac{1}{a_n'}\right)\right)\ge f\left(\ln\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\right)+\cdots+f\left(\ln\left(1+\frac{1}{s_n}\right)\right),$$

故

$$\ln\frac{1}{a_1}+\ln\frac{1}{a_2}+\cdots+\ln\frac{1}{a_n'}\ge\ln\frac{1}{s_1}+\ln\frac{1}{s_2}+\cdots+\ln\frac{1}{s_n},$$

即

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n'}\ge\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n}.$$

所以

$$a_1a_2\cdots a_n<a_1a_2\cdots a_n'\le s_1s_2\cdots s_n.$$

综上, 命题得证. □

参考文献

[1] 2004 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向IMO: 数学奥林匹克试题集锦 (2004) [M]. 华东师范大学出版社, 2004.

[2] 熊斌, 苏勇. 不等式的证明方法与技巧, 数学奥林匹克小丛书 (第三版) 高中卷 [M]. 华东师范大学出版社, 2020.