伊朗 OURMO 解答与评析

王广廷

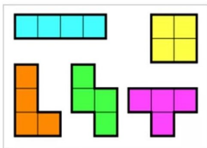
(上海市上海中学, 200231)

伊朗每年的数学竞赛组织的比赛比较多, 竞赛问题比较高产, 命题质量也较高, 每年都有很多漂亮的问题出现. 今年伊朗又组织了一个新的“OURMO”的比赛, 其赛制比较独特, 7 个参赛队伍每队准备一道题目, 在赛场上做另外六个队伍准备的题目. 本文给出了这些问题的解答和评析.

I. 试 题

1. 在一个 4×3000 的网格中, 至多可以给其中多少个方格染色, 使得其中不会出现四个骨牌?

注: 四格骨牌是指如下图形极其旋转和翻转所形成的的图形:



2. 给定顶点 A 以及 A 所对的旁切圆 ω_A. 做出所有的 $\triangle ABC$, 使得其三边与 ω_A 的切点所形成的切点三角形的重心恰好是 $\triangle ABC$ 的外心.

3. 是否存在一个非常数的, 由不同正整数组成的无穷数列, 使得对所有足够大的 k, 其中任意 k 项的和不含平方因子的充要条件是 k 不含平方因子.

4. 某学校中有 n 个班级和 k 个学生. 对学校中的任意两个同学, 他们共同参加的班级有且仅有一个, 且每个班级的学生个数都小于 k. 若 $k-1$ 不是完全平方数, 证明: 存在一个学生, 参加了至少 $\sqrt{k}$ 个班级.

收稿日期: 2020-04-13.　修订日期: 2020-05-18.

5. 考虑数列 $x_n = an+b, y_n = cn+d$, 其中 a,b,c,d 为正整数, 且 $\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$. 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 x_n, y_n 均不含平方因子.

6. 求所有函数 $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 和系数为正实数的多项式 $P(x), Q(x), R(x)$, 使得

$$f\left(\frac{x}{y}+R(y)\right) = \frac{f(x)}{Q(y)} + P(y),$$

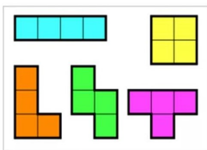
对所有正实数 x, y 成立.

7. 在 96×96 的正方形上标记 7501 个点. 我们将一个 4×4 的正方形网格挖去其中心的 2×2 的网格后剩余的部分称为一个"框". 证明: 至少有一个框中有至少 10 个点, 且其边界与这个 96×96 的正方形的边平行(不一定要与网格线重合).

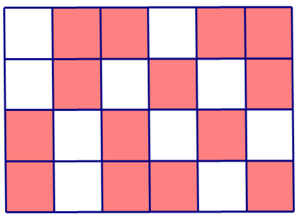
II. 解 答

题 1 在一个 4×3000 的网格中, 至多可以给其中多少个方格染色, 使得其中不会出现四个骨牌?

注: 四格骨牌是指如下图形极其旋转和翻转所形成的的图形:



解 将 4×3000 网格分成 500 个 4×6 的网格, 将每个 4×6 的网格按如下方式进行染色即满足题目的条件, 注意到每个 4×6 网格中染色了 14 个格子, 所以一共染色了 7000 个格子.



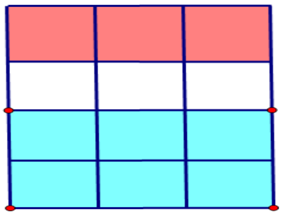
下面说明: 7000 是最大的.

我们说明: 每个 4×3 的网格中最多可以染 7 个格子.

用反证法, 假设存在某个 4×3 的网格中染了至少 8 个格子, 分两种情况说明这是不可以的:

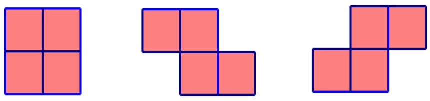
(1) 若某一行中有 3 个格子被染色, 则它们必须是第一行或者最后一行(否则, 该行上下两行的 6 个格子不能染色, 不然将出现四格骨牌, 此时最多共有 6 个格子被染色, 矛盾).

如图, 不妨设第一行格子被染色:

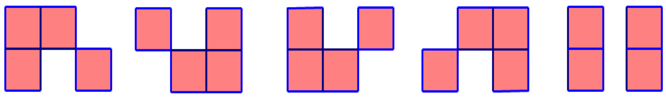


则该图中下半部分染蓝色的 2×3 的方格内有 5 个格子被染色, 这不可能.

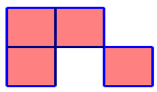
(2) 若每行有两个格子被染色, 则对于相邻的两行, 它们不能形成如下图形:



只能形成如下图形:

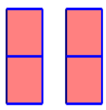


对 4×3 方格的中间两行进行讨论, 若为上述图形中的前四个之一, 不妨设为



则此时 4×3 方格表的第一行至多有一个黑格, 矛盾.

若中间两个染色格为



则 4×3 方格表的染色情况只能为第一列和第三列全部染色, 也不成立.

所以, 每个 4×3 的网格中最多可以染 7 个格子.

综上可知, 至多可将 7000 个格子染色, 使得其中不会出现四格骨牌. □

评注 这是一个中等难度的组合题, 可以从一些小的情况枚举入手. 题目的难点在于无论构造还是证明都要费一些周折, 导致可能在枚举的时候顾此失彼. 在枚举 4×3 的时候发现, 可以发现其中至多有 7 个黑格, 并且在其中涂黑 7 个黑格的方法是多种的, 这时就意识到这可能是阶梯的关键, 事实上只需要从中挑选两种拼接在一起就能够得到题目所需的构造了.

题 2 给定顶点 A 以及 A 所对的旁切圆 ω_A. 做出所有的 $\triangle ABC$, 使得其三边与 ω_A 的切点所形成的切点三角形的重心恰好是 $\triangle ABC$ 的外心.

解 仅运用尺规可以做出如下结论: (1) 线段的三等分点; (2) 线段的中垂线; (3) 定圆心. 将这些记为"工具".

设 ω_A 与 AB, AC 的延长线切于点 M, N.

用工具 (3), 可确定 ω_A 的圆心 J.

用工具 (2), 以 AJ 的中点为圆心, AJ 为直径作圆得到与 ω_A 的交点, 交点即为 M, N.

用工具 (2), 取线段 MN 的中点 D.

用工具 (1), 取线段 JD 的三等分点 A', 使得 $\frac{JA'}{A'D} = 2$.

用工具 (1), 取线段 JM 的三等分点 X, 使得 $JX = \frac{1}{3}JM$, 以 A' 为圆心, JX 为半径作圆 Γ.

用工具 (1), 作出 AA' 的中垂线 l, 取 l 与 Γ 的两个交点 O_1, O_2, 以 O_1 为圆心, O_1A 为半径作圆与线段 AM, AN 交于 B_1, C_1, 以 O_2 为圆心, O_2A 为半径作圆与线段 AM, AN 交于 B_2, C_2, 则 $\triangle AB_1C_1, \triangle AB_2C_2$ 是满足条件的三角形.

下面给出证明:

设 BC 在 ω_A 上的切点为 P, 线段 MP, NP 的中点分别为 E, F, 直线 BF, CE 与 $\triangle ABC$ 的外接圆 分别交于点 B', C', 则由 $\angle B'BP = \frac{1}{2}\angle NBP$, 得点 B' 是弧 ABC 的中点.

同理可得, C' 是弧 ACB 的中点.

所以, B', J, F; C', E, J 分别三点共线.

由 B', C', B, C 四点共圆及 E, F, B, C 四点共圆可得 $B'C'//EF$, 又计算可得 $\angle B'A''C' = \angle MPN = \angle EDF$.

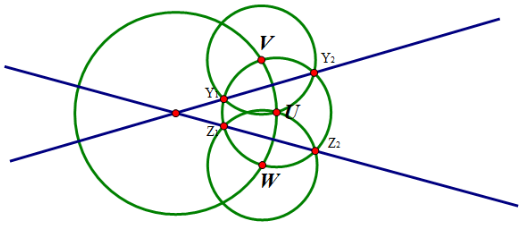
设 JD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 A''. 因此, $\triangle A''B'C'$ 与 $\triangle DFE$ 位似, 且位似中心为点 J. 注意到点 J 是圆 MNP 的外心, $\triangle A''B'C'$ 的外心是 $\triangle MNP$ 的重心, $\triangle DEF$ 的外心是 $\triangle MNP$ 的九点圆的圆心, 所以位似比是 $\frac{2}{3}$, 因此 $\frac{JA''}{JD} = \frac{2}{3}$, 所以点 A'' 与点 A' 重合.

设 O' 是 $\triangle ABC$ 的外心, 由 $DO' = \frac{1}{3}D'P$, 知 $A'O' = \frac{1}{3}JN = JX$, 且 O' 在 AA' 的中垂线上.

综上可得, 所有满足条件的 $\triangle ABC$ 的外心 O', 均在 AA' 的中垂线上, 也在以 A' 为圆心, $\frac{1}{3}JN$ 为半径的圆上.

工具(1),(2)是尺规作图的熟知结论, 最后给出工具(3)的证明.

假设给定圆 Ω, 在 Ω 上取点 U, 以点 U 为圆心, 任意长为半径作圆 Ω_1. 设圆 Ω_1 与圆 Ω 交于点 V, W. 分别以 V, W 为圆心, 以 UV, UW 为半径作圆 Ω_2, Ω_3 与 Ω_1 交于点 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, 则 直线Y_1Y_2 与 Z_1, Z_2 的交点即为 Ω_0 的圆心 (因为 Y_1Y_2, Z_1Z_2 分别是 UV, UW 的中垂线). $\square$



评注 这是一个具有一定难度而且比较不常规的几何题. 由于要求做出所有满足条件的三角形, 然而并不是所有一般位置的点 A 以及其旁切圆都存在相应的三角形, 所以需要注意在证明中不仅要说明做出的三角形 ABC 满足要求, 还要说明所有三角形都能用该方法做出, 二者缺一不可. 在探索的过程中, 需要时刻注意三角形间的位似关系, 并以此为突破口来确定三角形 ABC 的外心从而确定三角形的位置. 最后需要注意的是题目要求用尺规作图, 所以在解题过程还需要交代清楚几个尺规作图“工具”的证明, 例如做出给定两点中垂线, n 等分线段, 确定定圆圆心.

题 3 是否存在一个非常数的, 由不同正整数组成的无穷数列, 使得对所有足够大的 k, 其中任意 k 项的和不含平方因子的充要条件是 k 不含平方因子.

解 假设存在数列 $\{x_n\}$ 满足条件. 对任意素数 p, 考虑数列 $\{x_n\}$ 模 p^2, 由条件知, $\{x_n\}$ 模 p^2 为 0 的项只有有限项(否则, 取素数个 p^2 的倍数即知矛盾). $\{x_n\}$ 模 p 为 0 的项也只有有限项(否则, 存在无穷多个 k, 使得 $\frac{a_k}{p} \equiv r (\mathrm{mod}\ p)$, 则取 pq 个这样的数, 使得 $q > p$ 即得矛盾).

下面考虑数列 $\{x_n\}$ 中模 p^2 不为 0 的项组成的数列 $\{a_k\}$, 因为这样的项有无穷多项, 所以不妨设模 p^2 为 s 的项有无穷多项.

如果存在 $a_i \equiv r (\mathrm{mod}\ p^2)$, 使得 r 与 s 模 p^2 不同余且 p 不整除 r, 则存在 m 使得 $p^2 \mid (sm + r)$(由 s, r 均不为 p 的倍数, 知 m 存在且 p 不整除 $m + 1$).

构造素数 $q = p^2k + m + 1$, 且 $(p^2, m + 1) = 1$, 由狄利克雷定理, 知这样的 q 存在, 则得矛盾, 因为 a_i 与 $p^2k + m$ 个模 p^2 为 s 的数的和为 p^2 的倍数.

因此, 所有模 p 不为 0 的 a_k 均模 p 同余. 由数列 $\{a_n\}$ 非常数, 知存在 $a_i \neq a_j$, 取素数 $p > \max\{a_i, a_j\}$, 则 a_ia_j 模 p 不为 0, 但是 p 不整除 $a_i - a_j$, 矛盾.

故不存在这样的数列 $\{a_n\}$. $\square$

评注 这是一个相对容易的数论问题, 考察数论基本功. 上手比较自然, 直接对于任意素数, 考虑数列模素数 p 的平方的结果, 利用数列具有无穷项的性质, 对于具有无穷个模 p 相同的那一个剩余类进行讨论, 即可得到数列每一项都模 p 同余, 进而得出矛盾.

题 4 某学校中有 n 个班级和 k 个学生. 对学校中的任意两个同学, 他们共同参加的班级有且仅有一个, 且每个班级的学生个数都小于 k. 若 $k-1$ 不是完全平方数, 证明: 存在一个学生, 参加了至少 $\sqrt{k}$ 个班级.

证明 用反证法.

设参加班级数最多的同学为 x, 设他参加的班级为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 则 $m<\sqrt{k}$, 故 $m \leq \sqrt{k-1}$. 注意到 $k-1$ 不是完全平方数, 因此, $m \leq \sqrt{k-2}$.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{m}|A_i|=k+m-1$, 由平均数原理, 知存在 j, 使得 $|A_j| \geq \frac{k+m-1}{m}$. 又 $|A_j|<k$, 取不属于 A_j 的元素 y, y 与 A_j 中的每名同学参加一个不同的班级, 所以 y 参加的班级数至少为

$$|A_j| \geq \frac{k+m-1}{m}=1+\frac{k-1}{m} \geq 1+\frac{k-1}{\sqrt{k-2}}>m.$$

矛盾.

所以, 原问题得证. $\square$

评注 这是一道简单题, 利用反证法, 假设每个学生都参加了至少 $\sqrt{k}$ 个班级, 再取出一个学生, 利用条件进行简单组合分析即可.

题 5. 考虑数列 $x_n=an+b, y_n=cn+d$, 其中 a,b,c,d 为正整数, 且 $\gcd(a,b)=\gcd(c,d)=1$. 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 x_n, y_n 均不含平方因子.

证明 设 S_1 是使得 $\{an+b\}$ 有平方因子的 n 构成的集合, S_2 是使得 $\{cn+d\}$ 有平方因子的 n 构成的集合.

对正整数 N, 考虑 $a+b, 2a+b, \cdots, Na+b$, 由 a,b 互素知, 这些数中是 p^2(p为素数) 的倍数的至多有 $\lceil \frac{N}{p^2} \rceil$ 个.

所以

$$|S_1 \cap \{1,2,\cdots,N\}| \leq \sum_{p\text{为素数}, p \leq \sqrt{aN+b}} \left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil$$

$$\leq N\cdot\sum_{p\text{为素数}}\frac{1}{p^2}+\sqrt{aN+b}$$

$$\leq Nt+\sqrt{aN+b},$$

其中 $t<\frac{1}{2}$.

同理可得 $|S_2\cap\{1,2,\cdots,N\}|\leq Nt+\sqrt{cN+d}$.

所以, $1,2,\cdots,N$ 中至少有 $(1-2t)N-\sqrt{aN+b}-\sqrt{cN+d}$ 个数不在 S_1 也不在 S_2 中. 注意到 $t<\frac{1}{2}$, 因此, 当 $N\to+\infty$ 时, 知结论成立. $\square$

评注 存在性问题一半有两种做法, 一种是构造性的, 一种是非构造性的. 这个问题采用第二种做法, 通过证明 $1,2,\cdots,n$ 中满足 x_n 含平方因子的 n 不超过 $cN(c<\frac{1}{2},N$充分大), 从而证明结论.

题 6. 求所有函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 和系数为正实数的多项式 $P(x),Q(x),R(x)$, 使得

$$f\left(\frac{x}{y}+R(y)\right)=\frac{f(x)}{Q(y)}+P(y), \tag{1}$$

对所有正实数 x,y 成立.

解 在 (1) 中用 xy 代替 x 得 $f(x+R(y))=\frac{f(xy)}{Q(y)}+P(y)$. (2)

上式中令 $y=1$, 得 $f(x+R(1))=\frac{f(x)}{Q(1)}+P(1)$.

所以, 对正整数 k, 有

$$f(x+kR(1))=\begin{cases}\dfrac{1}{Q(1)^k}\left(f(x)-\dfrac{P(1)Q(1)}{Q(1)-1}\right)+\dfrac{P(1)Q(1)}{Q(1)-1}, & Q(1)\neq 1;\\ f(x)+kP(1), & Q(1)=1.\end{cases} \tag{3}$$

在 (2) 中分别令 $y=t,\frac{1}{t}(t>1)$,得

$$f(x+R(t))=\frac{1}{Q(t)}f(tx)+P(t).$$

$$f\left(x+R\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\frac{1}{Q\left(\frac{1}{t}\right)}f\left(\frac{x}{t}\right)+P\left(\frac{1}{t}\right).$$

故

$$f(tx)=Q(t)f(x+R(t))-P(t)Q(t)=\frac{1}{Q\left(\frac{1}{t}\right)}f(x-\frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\right))+P\left(\frac{1}{t}\right).$$

所以,

$$f\left(x+\left[R(t)+\frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\right)\right]\right)=\frac{1}{Q(t)Q\left(\frac{1}{t}\right)}f(x)+\left(P(t)+\frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{Q(t)}\right). \tag{4}$$

下面分情况讨论:

(I) 当 f, R 均不为常值函数时, 因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(R(t)+\frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\right)\right)=+\infty$, 故可令 $R(t)+\frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\right)=KR(1)$, 其中 K, t 均充分大, 则 $K\sim R(t)$. 由 f 不为常值函数, 比较(3),(4)得, 若 $Q(1)\neq 1$, 则 $Q(1)^K=Q(t)Q\left(\frac{1}{t}\right)$, 又 $K\sim R(t)$, 令 t 充分大, 可知矛盾. 故 $Q(1)=1$, 于是 $Q(t)Q\left(\frac{1}{t}\right)=1$ 对无穷多个 t 成立, 这说明 $Q(t)Q\left(\frac{1}{t}\right)\equiv 1$, 由此可知 $Q(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbb{N})$. 再比较 (3),(4), 得

$$P(t)+\frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{Q(t)}=KP(1)=\frac{R(t)+\frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\right)}{R(1)}P(1)$$

对无穷多个 t 成立, 于是该式也是恒等式, 故 (3) 对充分大的实数 K 也成立, 则 f 在 x 充分大时为线性的, 即 $f(x)=\frac{P(1)}{R(1)}x+T$, 再由 (3) 得, 对任意正实数 x, 有 $f(x)=\frac{P(1)}{R(1)}x+T$, 代回 (2) 可得

$$\frac{P(1)}{R(1)}(x+R(y))+T=\frac{1}{y^\alpha}\frac{P(1)}{R(1)}(xy+T)+P(y),$$

则必有 $\alpha=1, T=0$, $P(y)=\frac{P(1)}{R(1)}R(y)$.

经检验知成立.

(II) 当 f 为常值 C 时, $C=\frac{C}{Q(y)}+P(y)$, 则 P 为常值 D, Q 为常值 E, 于是 $C=\frac{C}{D}+E$.

经检验知成立.

(III) 当 R 为常值 C 时, 在 (4) 中用 $\frac{1}{t}$ 替换 t, 得

$$f(x+(C+Ct))=\frac{1}{Q(t)Q\left(\frac{1}{t}\right)}f(x)+\left(P\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{P(t)}{Q\left(\frac{1}{t}\right)}\right).$$

同 (I) 中讨论, 令 $C+Ct=KC$, 即 $K=t+1$, 与 (3) 比较得, 可得 $Q(1)=1$,$Q(x)=x^\alpha$, 然后得到 f 是线性的, $f(x)=\frac{P(1)}{R(1)}x+T$, 则有 $\alpha=1, T=0$,$P(y)=\frac{P(1)}{R(1)}R(y)$.

经检验知成立.

综上所述, 原题的所有解为: $f(x)=\frac{P(1)}{R(1)}x, Q(x)=x, P(x)=\frac{P(1)}{R(1)}R(x)$, 其中 $R(x)$ 是任意系数为正实数的多项式, 以及 $f(x)\equiv C, Q(x)\equiv D, P(x)=C-\frac{C}{D}$, 其中 $R(x)$ 是任意系数为正实数的多项式. □

评注 这是一个很困难的函数方程, 其中有 f, P, Q, R 四个未知函数, 开始容易想到将 y 赋值为 1 将原问题进行简化. 难点在于这并不能直接解决问题, 需要再将 y 赋值为另一个字母 t, 将问题转化为关于 $f(tcx+c)$ 和 $f(cx)$ 间的关系. 为了得到 $f(x+c)$ 和 $f(x)$ 之间的关系, 需要在令 $y=\frac{1}{t}$, 并将上两式联立, 消去

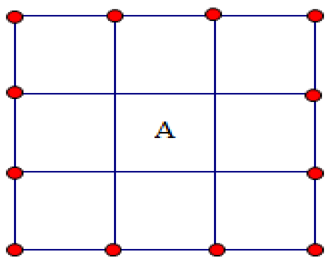
$f(tx)$, 得到第二个 $f(x+c)$ 与 $f(x)$ 的关系式, 将此式与上述 $y=1$ 的式子联立后,得到几个恒等式, 估计量级后就得到 $Q(x)=x^{\alpha}$, 剩下的问题就容易解决了.

题 7. 在 96×96 的正方形上标记 7501 个点. 我们将一个 4×4 的正方形网格挖去其中心的 2×2 的网格后剩余的部分称为一个"框". 证明: 至少有一个框中有至少 10 个点, 且其边界与这个 96×96 的正方形的边平行(不一定要与网格线重合).

证明 1 将该 96×96 的正方形扩充为 100×100 的正方形并保持原正方形的中心不变. 随机的在 96×96 的正方形中选一个点, 则每一个标记点被框住的概率大于等于 $\frac{12}{100\times 100}=\frac{3}{2500}$. 所以被框住的点的期望 $E\geq 7501\times\frac{3}{2500}>9$. 所以存在一种情况框住 10 个点. □

证明 2 将该 96×96 的正方形扩充为 99×99 的正方形并保持原正方形的中心不变. 在这 10000 个网格线的交点处各放置一个框, 使得框的中心就是网格线的交点. (注: 新正方形的网格线与原来的网格线是不同的).

考虑每个原正方形中的标记点 A, 点 A 一定在新正方形的某个格中, 且该格不在边界上, 则以下图中红点为中心的框一定包含点 A.



因此, 每个标记点至少被包含 12 次, 故存在一个框,包含至少 $\frac{12\times 7501}{10000}>9$ 个点.

所以, 存在一个框, 包含至少 10 个点. □

评注 这个组合题如果熟悉概率的方法可能会发现题目相当于在正方形中随机选一个点, 只要这样做能框住的点的期望大于 9, 就一定存在一种情况至少框住 10 个点, 只需要去验证每个点被框住的概率大于下界就可以了. 如果不用概率方法可以用算两次的办法, 在正方形内中均匀的放置一些点, 考虑每个标记点会被多少个放置的点框住, 这样就能够得到和概率方法一样的结果.