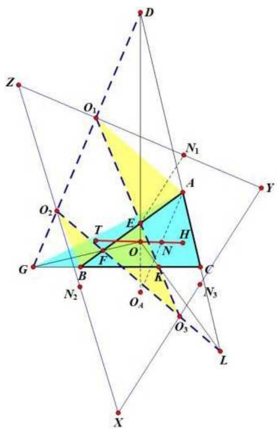
# 第三十五期问题征解解答与点评

牟晓生

**第一题** 设 $\triangle ABC$ 中, $BC$ 中垂线交直线 $AC, AB$ 于$D, E$. 令 $I_a$ 为 $\triangle ADE$ 的欧拉线, 类似定义 $I_b, I_c$. 令 $T$ 是直线 $I_a, I_b, I_c$ 围成的三角形的外心. 证明: $T$ 在 $\triangle ABC$ 的欧拉线上.

(兰州一中学生 郝敏言 供题)

**证明** (根据供题者的解答整理):




设 $AC$ 中垂线分别交 $AB, BC$ 于 $F, G$, 设 $AB$ 中垂线分别交 $BC, AC$ 于 $K, L$. 由

$$\angle OAE = 90^\circ - \angle ACB = \angle ODA \Rightarrow OA^2 = OD \cdot OE.$$

同理,

$$OB^2 = OF \cdot OG; OC^2 = OK \cdot OL.$$

因而 $D, O_2, G$ 三线共点, 进而 $D, O_1, O_2, G$ 共线.

同理 $O_1, E, K, O_3$ 共线, $O_2, F, O_3, L$ 共线.

注意到:

$$\triangle AO_1E \sim \triangle BO_2F \sim \triangle EO_3F \sim \triangle ACG,$$

则

$$\frac{AE}{DO_1}=\frac{EF}{EO_3}=\frac{FB}{O_2G}=\frac{AC}{AG}.$$

同时

$$\angle CGA=\angle CDB(2\angle ADE)\Rightarrow D,G,B,A\text{四点共圆}\Rightarrow\frac{AB}{DG}=\frac{AC}{AG}.$$

因而

$$\frac{AE}{DO_1}=\frac{EF}{EO_3}=\frac{FB}{O_2G}=\frac{AB}{DG}\Rightarrow\frac{EF}{O_1O_2}=\frac{EF}{EO_3}\Rightarrow O_3E=O_1O_2.$$

设 $I_a,I_b,I_c$ 所围成的三角形为 $\triangle XYZ$. 设 $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle BFG$, $\triangle CKL$ 的九点圆圆心分别为 $N,N_1,N_2,N_3$, 设 $O$ 关于 $BC$ 的对称点为 $O_A$, 熟知:

$$AH=OO_A\Rightarrow A,N,O_A\text{三点共线}.$$

注意到

$$\triangle BHC(N,O_A)\sim\triangle DAE(N_1,O_1)\Rightarrow EN_1\perp CN\text{ 且 }ANO_A\perp N_1O_1.$$

同理 $CN\perp XY$, 进而

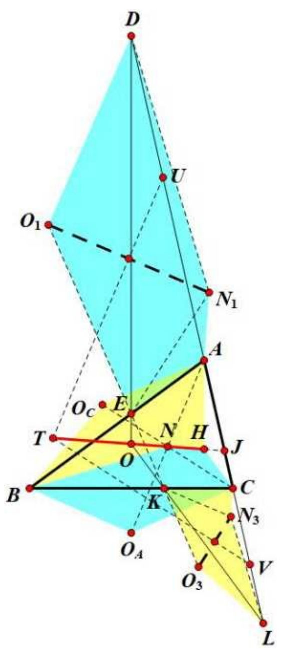
$$EN_1\parallel XY.$$

因而

$$\frac{O_1N_1}{O_1Z}=\frac{DO_1}{O_1O_2}=\frac{EO_1}{EO_3}=\frac{O_1N_1}{N_1Y}\Rightarrow O_1Z=N_1Y.$$

同理

$$O_2Z=N_2X,O_3X=N_3Y.$$



设 $OH,AC$ 交于点 $J$, 注意到: $\triangle AHC$ 与 $DOL$ 位似, 则 $J$ 为位似中心, 进而 $\frac{JA}{JC}=\frac{JD}{JL}=\frac{AD}{CL}$. 过 $T$ 作 $O_1N_1,O_3N_3$ 的垂线分别交 $AC$ 于 $U,V$, 注意到已证结论:

$$AN\perp O_1N_1, CN\perp O_2N_3,$$

因而

$$TU \parallel NA, TV \parallel NC.$$

因而

$$T,N,J\text{共线}\Leftrightarrow \frac{JU}{JV}=\frac{JA}{JC}\Leftrightarrow \frac{AU}{CV}=\frac{JA}{JC}.$$

因而只需

$$\frac{AU}{CV}=\frac{AD}{CL}\Leftrightarrow \frac{AU}{UD}=\frac{CV}{VL}.$$

设 $O$ 关于 $AB$ 的对称点为 $O_C$, 注意到

$$\triangle BHC(N,O_A)\sim\triangle DAE(N_1,O_1),$$

$$\triangle AHB(N,O_C)\sim\triangle CKL(N_3,O_3).$$

因而只需: $NO_A,NO_C$ 的中垂线分 $BH$ 所得比例相等, 即 $\triangle NO_AO_C$ 的外心在 $BH$ 上.

注意到: $BH$ 垂直平分 $O_AO_C$, 结论显然成立. 证毕! □

**第二题** 给定实数 $t>\frac{1}{2}$, 以及实数 $a,b,c$ 满足 $ab+bc+ca>0$. 证明:

$$(a^2+t-\frac{1}{3})(b^2+t-\frac{1}{3})(c^2+t-\frac{1}{3})\geq t^3(ab+bc+ca)^{\frac{1}{t}}.$$

(青岛二中学生 陈晓琨 供题)

**证明** (**根据长沙市南雅中学黄靖睿同学的解答整理**):

原不等式等价于证明

$$\left(1+\frac{a^2-\frac{1}{3}}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{b^2-\frac{1}{3}}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{c^2-\frac{1}{3}}{t}\right)^{2t}\geq(ab+bc+ca)^2.$$

由于 $t>\frac{1}{2}$, 我们有 $\frac{a^2-\frac{1}{3}}{t}>-1$ 且 $2t>1$. 所以由伯努利不等式可知

$$\left(1+\frac{a^2-\frac{1}{3}}{t}\right)^{2t}\geq 1+2(a^2-\frac{1}{3})=2a^2+\frac{1}{3}.$$

类似的式子对 $b,c$ 也成立. 所以只要证明

$$(2a^2+\frac{1}{3})\cdot(2b^2+\frac{1}{3})\cdot(2c^2+\frac{1}{3})\geq(ab+bc+ca)^2.$$

不失一般性, 不妨设 $a^2-\frac{1}{3}$ 与 $b^2-\frac{1}{3}$ 同正负, 即 $a^2b^2+\frac{1}{9}\geq\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2$. 则

$$(2a^2+\frac{1}{3})\cdot(2b^2+\frac{1}{3})\geq 3a^2b^2+a^2+b^2.$$

于是由柯西不等式,

$$(2a^2+\frac{1}{3})\cdot(2b^2+\frac{1}{3})\cdot(2c^2+\frac{1}{3})\geq(3a^2b^2+a^2+b^2)(\frac{1}{3}+c^2+c^2)\geq(ab+bc+ca)^2.$$

命题得证! $\square$

**评注** 人大附中陈锐韬同学也给出了本题的正确解答.

**第三题** 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是公差为 $d$ 的递增的正整数等差数列 $(n>2)$, 满足

$$a_1>d\cdot\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,n-1).$$

证明: 存在两两互异的素数 $p_1,p_2,\ldots,p_n$, 使得 $p_i\mid a_i$, $\forall i$.

(山大附中学生 王子彧 供题)

**证明 (根据人大附中陈锐韬同学的解答整理)**:

不妨设 $a_1$ 与 $d$ 互质, 否则可以把整个数列除去 $\gcd(a_1,d)$, 不影响条件与结论. 考虑 $\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,n-1)$ 的质因子分解:

$$\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,n-1)=\prod_{j=1}^{k}q_j^{\alpha_j}.$$

对 $1\leq i\leq n$, 如果 $a_i$ 含有某个大于等于 $n$ 的质因子 $q$, 则取 $p_i=q$. 否则 $a_i$ 所有的质因子都在 $q_j$ 中, 即

$$a_i=\prod_{j=1}^{k}q_j^{\beta_j}.$$

由假设 $a_i>\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,n-1)$, 所以存在某个 $j$ 使得 $\beta_j>\alpha_j$. 此时我们取 $p_i=q_j$.

下面我们证明这种取法满足 $p_1,\ldots,p_n$ 两两不同. 用反证法, 假设 $p_{i_1}=p_{i_2}=q$. 由于每个 $a_i$ 与 $d$ 互素, 而 $q$ 整除 $a_i$, 故 $q$ 与 $d$ 互素. 注意到

$$q\mid a_{i_1}-a_{i_2}=(i_1-i_2)\cdot d.$$

所以 $q\mid i_1-i_2$, 导出 $q<n$. 此时设 $q=q_j$, 则由 $p_{i_1},p_{i_2}$ 的取法知 $a_{i_1},a_{i_2}$ 都是 $q_j^{\alpha_j+1}$ 的倍数. 进而 $q_j^{\alpha_j+1}$ 整除 $i_1-i_2$, 导致 $q_j^{\alpha_j+1}$ 整除 $\mathrm{lcm}(1,2,\ldots,n-1)$, 矛盾! 故结论成立. $\square$

**评注 (1).** 北京十一学校崔云彤, 安师大附中胡越洋, 重庆南开中学姜雨昊,

湖南师大附中陈茁卓, 学军中学缪何玺, 山西长治第二中学任炫智和清华大学严君啸等同学也给出了本题的正确解答.

**(2).** 由素数定理知 $\operatorname{lcm}(1,2,\ldots,n-1)=(e+o(1))^n$, 所以本题的条件大致为 $a_1>d\cdot e^n$. 这里的 $e$ 是否能被改进是一个值得研究的问题.

**第四题** 将一个 $n\times n$ 白色棋盘上的若干个格子染黑, 然后把同行同列上相邻的黑格用线段相连, 得到一个以黑格为顶点, 线段为边生成的图 $G$.

(1) 若 $G$ 中无圈, 求黑格个数的最大值;

(2) 若 $G$ 中无偶圈, 求黑格个数的最大值.

**注:** “相邻”的黑格指两个黑格之间没有黑格.

(深圳中学学生 池昊哲 温凯越 供题)

**证明 (根据供题者的解答整理)**:

在以下的解答中, 我们把问题一般化, 考虑 $x\times y$ 的棋盘, 余下问题不变.

(1) 对 $x\times y$ 的棋盘, 若对应的图中无圈, 我们证明黑格的个数 $\leq x+y-1$, 对 $x+y$ 归纳证明, $x+y=2$ 时, 必有 $x=y=1$ 命题显然.

下设对 $x+y\leq k$ 的棋盘, 若对应的图中无圈, 黑格的个数 $\leq x+y-1$. 对 $x+y=k+1$ 的棋盘, 若 $x=1$ 或 $y=1$, 命题显然.

下面我们设 $x,y\geq 2$, 我们指出以下事实:

由于图 $G$ 无圈, 从而是一个森林, 则必有度数 $\leq 1$ 的顶点, 考虑这个黑格 $v$, 对其度数分类讨论。

(I) 度数为 0, 则其同行或同列均无其他黑格, 考虑删去该行该列, 将棋盘余下部分拼接成一 $(x-1)\times(y-1)$ 的新棋盘 (保持各部分相对位置不变), 设其对应图为 $G_0$, 不难发现 $G_0$ 实际上是 $G$ 删去 $v$ 后的导出子图, 其中自然无圈, 由归纳假设, 新棋盘上黑格数 $\geq x+y-3$, 加入删去的一个黑格归纳结论成立.

(II) 度数为 1, 则其所在行或列上只有其一个黑格, 考虑删去该行或列, 将余下棋盘拼接在一起 (保持原本左右或上下关系), 得到 $x-1\times y$ 或者 $x\times y-1$ 的新棋盘, 设其对应的图为 $G_0$, 不难发现 $G_0$ 实际上是 $G$ 删去 $v$ 后的导出子图, 其中自然无圈, 由归纳假设, 新棋盘上黑格数 $\leq x+y-2$, 加入删去的一个黑格归纳结论成立.

从而归纳成立, 若对应的图中无圈, 黑格的个数 $\leq x+y-1$, 等号是容易取到的, 只需考虑将一行和一列全部染黑即可.

(2) 我们将采用类似的归纳思路来处理此问题, 但为了方便表述, 我们要引

入一些新的定义:

**定义 1** 对图 $G$ 顶点子集 $v_1$ 的导出子图 $G_1$, 若 $v_1$ 满足如下性质:"对 $v_1$ 中的任意两个黑格, 若其同行或同列, 则两个黑格之间所有黑格均在 $v_1$ 中"(记为棋盘性), 则称其对应棋盘的行列数为顶点集 $v_1$ 中黑格所在的行数 $m$ 和列数 $n$.

这个定义的意义在于, 我们可以染黑对应棋盘上若干黑格, 按照题目中的连线规则, 得到完全相同的图 $G$, 具体操作过程如下: 考虑原本棋盘上 $v_1$ 中黑格所在的行和列的交形成的 $m \times n$ 方格表, 从上到下分别称为第 $1-m$ 行, 从左至右称为第 $1-n$ 列, 设 $v_1$ 中的任一黑格在第 $x$ 行 $y$ 列, 则将对应棋盘的第 $x$ 行 $y$ 列对应染黑, 由于棋盘性, 可知对应棋盘上的黑格按照题设规则构成的图恰是图 $G_1$. 这表示顶点集 $v_1$ 中黑格个数不超过其对应棋盘在本小问条件下黑格数的最大值.

**定义 2** 将在本小问条件下 $x \times y$ 棋盘上黑格数的最大值记为 $t(x, y)$. 由于黑格排列方式有限, 此最大值的存在性显然.

下面指明关于图 $G$ 的一些事实:

**事实 1** 对图 $G$ 中顶点 $v$, 若 $v$ 的度数 $\geq 3$, 则 $G$ 去掉 $v$ 得到的导出子图, 连通分支数 $\geq 2$.

证明 反证之, 若导出子图连通, 考虑 $v$ 原与点 $x, y, z$ 相邻, 下一段中 $i, j$ 表示 $x, y, z$ 中任一者.

考虑导出子图的支撑树, 存在点 $r$, 使得 $r$ 到 $x, y, z$ 在支撑树上的路两两只交于 $r$ ($r$ 可能与 $x, y, z$ 重合), 将这三条路记为 $(r, i)$, 考虑 $i$ 到 $r$ 的在支撑树上的路, 记为 $(i, r)$, 考虑以下三个圈 $v-(i, r)-(r, j)-v$ ($i$ 不同于 $j$, 将 $(i, r)$ 与 $(r, j)$ 重复的顶点 $r$ 去掉一个), 则必有一个偶圈, 矛盾. 证毕!

**事实 2** $t(x, y) \geq t(x, y-1)+1$.

证明 构造证明, 在左侧 $x \times y-1$ 的棋盘中根据 $x \times y-1$ 的最大构造染黑 $t(x, y-1)$ 个黑格, 在余下的一列中任意染黑一个黑格. 这显然是符合题设的构造, 黑格个数为 $t(x, y-1)+1$, 从而命题成立.

下面回到原题, 对 $x+y$ 归纳证明以下结论:

**结论 1** $t(x, y)=\max \left(t\left(x_1, y_1\right)+t\left(x_2, y_2\right)-1\right)$, 其中 $x_1+x_2=x+1, y_1+y_2=y+1, x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 1, x, y \geq 3$.

**结论 2** 对任意 $x \times y$ 棋盘, 存在一种黑格排列方式,使得黑格个数取得最大值, 且存在一对对角顶点均被染黑.

(I) 当 $\min (x, y)=1$ 时, 显然 $t(x, y)=\max (x, y)$, 取等方式是将所有格染黑,

从而结论 2 成立.

(II) 当 $\min(x,y)=2$ 时, 若 $x=y=2$, 枚举可得 $t(x,y)=3$, 一种取等方式是染一条对角线, 与任意一个不在该对角线上的格子. 若 $\max(x,y)\geq 3$, 我们证明 $t(x,y)=\max(x,y)+2$, 不妨设棋盘形状为 $2\times y$.

**事实 3** 若有一列全部染黑, 称为黑列, 则对任意黑列, 它的左侧和右侧不同时再有黑列.

证明 反证法.

考虑距离该黑列最近的左侧和右侧最邻近的两个黑列 (称为左黑列和右黑列), 那么显然左黑列和黑列及其中间的黑格组成一个圈 (即从该黑列上方格子出发, 从右向左到左黑列上方格子, 再到左黑列下方格子, 从左到右到该黑列下方格子, 最后回到该黑列上方格子), 称为圈 1.

同理, 左黑列和右黑列及其中间的黑格构成一个圈, 右黑列和该黑列及其中间的黑格构成一个圈, 分别称为圈 2, 圈 3. 这三个圈的顶点数之和为 $2+2\times$(圈 2 顶点数), 从而必有偶圈, 矛盾. 事实 3 证毕!

根据事实 2, 我们不难知道黑列至多两列, 从而 $t(x,y)\leq\max(x,y)+2$. 对 $2\times y$ 棋盘, 一种取等方式为染黑上方一行全部, 以及下方一行最左和最右的两格. 对 $x\times 2$ 只需旋转即可, 此时结论 2 成立.

(III) 设该命题对 $x+y\leq k$ 成立. 考虑 $x+y=k+1$, 无需在考虑 (I),(II)中情况, 故可设 $\min(x,y)\geq 3$.

首先说明, 存在 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 使得

$$t(x,y)\leq t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)-1,$$

其中 $x_1+x_2=x+1, y_1+y_2=y+1, x_1,x_2,y_1,y_2\geq 1, x,y\geq 3$. (结论 $a$)

设图 $G$ 符合题设, 且黑格数取到最大值, 对图 $G$ 中的连通性和顶点度数 (显然均小于等于 4) 分类讨论.

(i) 若图 $G$ 中有至少两个连通分支, 考虑以下两个子图, 分别为其中一个连通分支, 以及剩余顶点的导出子图, 显然均满足棋盘性 (因为由题设, 两个子图顶点集中的黑格所占据的行和列是无交的), 设它们对应棋盘的行列数为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则有 $x_1+x_2=x, y_1+y_2=y$, 从而

$$t(x,y)\leq t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)\leq t(x_1+1,y_1+1)+t(x_2,y_2)-1,$$

结论 $a$ 成立.

(ii) 若图 $G$ 连通, 且存在顶点度数为 1, 我们删去该顶点所单独占据的行或

者列, 余下的黑格的导出子图显然满足棋盘性, 对应棋盘的行列数为 $(x-1,y)$ 或 $(x,y-1)$, 所以

$$t(x,y) \le t(x-1,y)+1 = t(x-1,y)+t(2,1)-1,$$

或者对偶的,

$$t(x,y) \le t(x,y-1)+t(1,2)-1,$$

结论 $a$ 成立.

(iii) 若图 $G$ 连通, 且存在顶点 $v$ 度数为 3, 考虑 $G$ 删去 $v$ 后的导出子图的连通分支个数, 由事实 1 可知其至少为 2, 又有 $v$ 度数为 3, 所以至大为 3.

若连通分支个数为 2, 则考虑以下两个子图, 分别是连通分支 $x$ ($v$ 引向 $x$ 的边数为 1), 以及剩余顶点的导出子图. 不难发现两者均满足棋盘性 (因为由题设, 两个子图顶点集中的黑格所占据的行和列的交至多为 $v$ 所在的行或列, 而在该行或列上两个子图的黑格被 $v$ 分隔开了, 否则两个子图之间就有顶点不为 $v$ 的边).

设它们对应棋盘的行列数为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则有 $x_1+x_2=x+1, y_1+y_2=y$, 或其对偶 (取决于 $v$ 在行还是列上只引出一条边). 从而

$$t(x,y) \le t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2) \le t(x_1,y_1+1)+t(x_2,y_2)-1,$$

结论 $a$ 成立.

若连通分支个数为 3, 类似的可得到三个满足棋盘性的连通分支, 进一步有

$$t(x,y) \le t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)+t(x_3,y_3)+1,$$

其中 $x_1+x_2+x_3=x+1, y_1+y_2+y_3=y$, 或其对偶.

由归纳假设,

$$t(x_1+x_2-1,y_1+y_2-1)-1 \ge t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2).$$

从而利用事实 2,

$$t(x,y) \le t(x_1+x_2-1,y_1+y_2-1)+t(x_3,y_3)+2 \le t(x_1+x2,y_1+y_2+1)+t(x_3,y_3)-1.$$

(IV) 若图 $G$ 连通, 且顶点度数均为偶数, 且存在顶点 $v$ 度数为 4, 考虑 $G$ 删去 $v$ 后的导出子图的连通分支个数, 由事实 1 可知其至少为 2, 又有所有顶点度数均为偶数, 所以由握手定理, $v$ 向每个连通分支引出的度数均为偶数, 所以连通分支数恰为 2.

考虑以下两个子图, 分别是两个连通分支以及 $v$ 引向该连通分支的边, 不难发现其满足棋盘性 (因为由题设, 两个子图顶点集中的黑格所占据的行和列的交

至多为 $v$ 所在的行或列, 而在该行或列上两个子图的黑格被 $v$ 分隔开了, 否则两个子图之间就有顶点不为 $v$ 的边), 设它们对应棋盘的行列数为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则有 $x_1+x_2=x+1,y_1+y_2=y+1$, 注意到 $v$ 被统计两次, 从而

$$t(x,y)\le t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)-1,$$

结论 $a$ 成立.

(V) 若图 $G$ 连通, 且顶点度数均是 2.

设有 $a$ 行上只有一个黑格, $b$ 列上只有一个黑格, 对于任意一个黑格, 若其所在行和列上均有至少两个黑格, 则其事实上是所在行和列上最边缘的黑格, 从而这样的黑格不多于 $2\times\min(x-a,y-b)$ (分别是有至少两个黑格的行和列数). 从而少于 $x+y-a-b$ 个, 于是若在这种情况下, 我们会得到 $t(x,y)\le x+y$.

我们指出

$$x+y\le\max\left(t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)-1\right),$$

其中 $x_1+x_2=x+1,y_1+y_2=y+1,x_1,x_2,y_1,y_2\ge 1,x,y\ge 3$.

这是因为 $t(x,y)\ge x+y$. 当 $\min(x,y)\ge 2,(x,y)$ 不是 (2,2) 时. 注意到当 $\min(x,y)=2$ 时, 我们已经证明了此不等式. 对余下情况, 反复利用事实 2 即可.

特别地考虑 $(1,2),(x,y-1)$, 我们知道 $\min(x,y)\ge 3$, 从而利用上一段的不等式, 我们有

$$t(1,2)+t(x,y-1)-1\ge 2+x+y-1-1=x+y,$$

于是结论 $a$ 成立.

综上所述, 结论 $a$ 成立.

设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 使得 $t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)-1$ 最大. 其中 $x_1+x_2=x+1,y_1+y_2=y+1,x_1,x_2,y_1,y_2\ge 1,x,y\ge 3$.

那么考虑如下构造, 在第 1 到 $x_1$ 行, 1 到 $y_1$ 列涂黑归纳结论 2 中对 $(x_1,y_1)$ 满足条件的排列方式, 使得被染黑的对角顶点为 (1,1) 和 $(x_1,y_1)$; 在 $x_1$ 到 $x$ 行, $y_1$ 到 $y$ 列涂黑归纳结论 2 中对 $(x_2,y_2)$ 满足条件的排列方式, 使得被染黑的对角顶点为 $(x,y)$ 和 $(x_1,y_1)$. 容易验证此构造符合题设, 与结论 $a$ 结合可知归纳结论 1 成立. 从构造又容易看出归纳结论 2 成立. 从而归纳成立!

完成归纳后, 我们得到关于 $t(x,y)$ 的递推公式.

$$t(x,y)=\max\left(t(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)-1\right).$$

其中 $x_1+x_2=x+1,y_1+y_2=y+1,x_1,x_2,y_1,y_2\ge 1,x,y\ge 3$.

根据略显繁琐但并不困难的计算, 我们不难得到 (计算过程在此略去):

$$t(x,y) = y + 2x - 2 \ (\text{当} y \geq 2x - 1),$$
$$t(x,y) = \left[\frac{4x+4y-5}{3}\right] \ (\text{当} 2x - 1 > y \geq x),$$
$$t(x,y) = t(y,x) \ (\text{当} y < x)$$

以下是从 $1 * 1$ 到 $10 * 10$ 的 $t$ 值.

$$[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],$$
$$[2,3,5,6,7,8,9,10,11,12],$$
$$[3,5,6,7,9,10,11,12,13,14],$$
$$[4,6,7,9,10,11,13,14,15,16],$$
$$[5,7,9,10,11,13,14,15,17,18],$$
$$[6,8,10,11,13,14,15,17,18,19],$$
$$[7,9,11,13,14,15,17,18,19,21],$$
$$[8,10,12,14,15,17,18,19,21,22],$$
$$[9,11,13,15,17,18,19,21,22,23],$$
$$[10,12,14,16,18,19,21,22,23,25].$$

至此我们完成了证明. $\square$