# 2019 年罗马尼亚大师杯 (RMM) 代数部分预选题

依嘉
(中国人民大学附属中学, 100080)
指导教师: 张端阳

罗马尼亚大师杯 (RMM) 是由罗马尼亚数学会主办的一场国际邀请赛, 中国、美国、俄罗斯和一些罗马尼亚周边的国家会受邀参加, 是一个在国际上十分重要的比赛. 2019 年的 RMM 于 2 月 20 日 $\sim$ 2 月 25 日举行, 由上海市组队参加.

这篇文章为 2019 年 RMM 代数部分的预选题, 共 3 道题, 其中第三题为 RMM 的第五题. 本人认为预选题中第一题相对简单, 后两道题较难, 整体难度略高于 CMO. 此外, 第一题和第三题均为函数方程.

囿于本人水平, 文中若有不当之处或新颖解法, 敬请指教.

## I. 试 题

**1.** 求映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对 $\forall\, a,\ b\in\mathbb{R}$, 均有

$$f\left(a^2+ab+f\left(b^2\right)\right)=af(b)+b^2+f\left(a^2\right).$$

**2.** 给定 $n\in\mathbb{N}^*$. 将 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 划分为两个 $n$ 元子集 $A,\ B$. 若存在常数 $c_n$, 使得我们无论怎么划分, 一定存在 $A$ 中元素的排列 $a_1\sim a_n$ 和 $B$ 中元素的排列 $b_1\sim b_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\geq c_n.$$

求 $c_n$ 的最大值.

**3.** 求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对 $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}$, 均有

$$f(x+yf(x))+f(xy)=f(x)+f(2019y).$$

**修订日期: 2020-07-06.**

## II. 解答与评注

**1.** 求映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对 $\forall\, a,\ b\in\mathbb{R}$, 均有

$$f\left(a^2+ab+f\left(b^2\right)\right)=af(b)+b^2+f\left(a^2\right).$$

**解 1** (1) 令 $a=0$, 有

$$f\left(f\left(b^2\right)\right)=b^2+f(0). \quad ①$$

令 $a=-1,\ b=1$, 有

$$f(f(1))=-f(1)+1+f(1)=1. \quad ②$$

由①知 $f(f(1))=1+f(0)$. 因此

$$f(0)=0. \quad ③$$

由①, ③知

$$f\left(f\left(b^2\right)\right)=b^2. \quad ④$$

(2) 在 $b\neq 0$ 时. 取 $a=-\frac{f\left(b^2\right)}{b}$, 则 $ab+f\left(b^2\right)=0$. 因此

$$f\left(a^2+ab+f\left(b^2\right)\right)=f\left(a^2\right).$$

此时

$$-\frac{f\left(b^2\right)}{b}f(b)+b^2=0\Rightarrow f(b)f\left(b^2\right)=b^3. \quad ⑤$$

又 $b=0$ 时⑤仍成立. 因此 $f(b)f(b^2)=b^3$ 恒成立.

令 $a+b=0$, 有

$$f\left(f\left(b^2\right)\right)=b^2-bf(b)+f(b^2). \quad ⑥$$

将④带入⑥, 知 $f\left(b^2\right)=bf(b)$. 结合⑤知 $f(b)=\pm b$.

(3) 若 $f(a)=a,\ f(b)=-b$, 且 $a,\ b\neq 0$, 则由⑤知 $f\left(a^2\right)=a^2,\ f\left(b^2\right)=-b^2$. 代回原式, 有

$$f\left(a^2+ab-b^2\right)=-ab+b^2+a^2.$$

(i). 若 $f\left(a^2+ab-b^2\right)=a^2+b^2-ab$, 则 $b=0$ 或 $a=b$ 矛盾.

(ii). 若 $f\left(a^2+ab-b^2\right)=b^2-ab-a^2$, 则 $a=0$ 矛盾.

所以 $f(x)=x$ 对 $\forall x$ 成立或 $f(x)=-x$ 对 $\forall x$ 成立.

经检验 $f(x)\equiv x$ 和 $f(x)\equiv -x$ 均为原方程的解. □

**解 2** 用 $P(a,b)$ 表示原方程.

考虑方程 $P(a,b)$ 和 $P(-a-b,b)$, 作差得到

$$f\left((a+b)^2\right)-f\left(a^2\right)=(2a+b)f(b).$$

记这个方程为 $Q(a,b)$. 考虑 $Q(a,b)$ 和 $Q(a,-2a-b)$, 作差知

$$(2a+b)f(b)=-bf(-2a-b).$$

即

$$\frac{f(b)}{b}=\frac{f(-2a-b)}{-2a-b}$$

对 $\forall\, a,\ b$ 成立.

因此 $\exists\, c$ 使 $f(x)\equiv cx$, 代回原题检验, 知 $c=\pm 1$.

所以方程的解为 $f(x)=x$ 或者 $f(x)=-x$. □

**评注** 这是一个相对比较简单的函数方程, 方法相对比较常规. 证法是一个常规做法, 第一步得到 $f(0)=0$, 第二步得到 $f(x)=\pm x$, 最后解出原方程的解. 证法二则相对巧妙, 直接通过代换解出 $f(x)=cx$, 过程相对比较短, 但却并不容易想到其中的代换.

**2.** 给定 $n\in\mathbb{N}^*$. 将 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 划分为两个 $n$ 元子集 $A,\ B$. 若存在常数 $c_n$, 使得我们无论怎么划分, 一定存在 $A$ 中元素的排列 $a_1\sim a_n$ 和 $B$ 中元素的排列 $b_1\sim b_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\geq c_n.$$

求 $c_n$ 的最大值.

**解** 记

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{13}{12}n^3-\dfrac{1}{3}n, & n\text{ 是偶数}\\ \dfrac{13}{12}n^3-\dfrac{1}{12}n, & n\text{ 是奇数}\end{cases}.$$

对 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 的任意一个划分 $(A,\ B)$, 设 $A$ 中元素满足

$$a_1<a_2<\cdots<a_s\leq n<a_{s+1}<\cdots<a_n;$$

$B$ 中元素满足

$$b_1>b_2>\cdots>b_s>n\geq b_{s+1}>\cdots>b_n.$$

下证:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\geq C_n.$$

对 $1 \le i \le n$, 记 $x_i = |a_i - b_i|$. 注意到

$$x_1 \ge x_2 + 2 \ge \cdots \ge x_s + 2(s-1),$$

$$x_n \ge x_{n-1} + 2 \ge \cdots \ge x_{s+1} + 2(n-s-1).$$

所以由拉格朗日恒等式,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} x_i^2 =& \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)^2 + \frac{1}{s}\sum_{1\le i<j\le s}(x_i - x_j)^2 \\ \ge& \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)^2 + \frac{4}{s}\sum_{1\le i<j\le s}(i-j)^2 \\ =& \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)^2 + \frac{s^3 - s}{3}.\end{aligned}$$

同理,

$$\sum_{i=s+1}^{n} x_i^2 \ge \frac{1}{n-s}\left(\sum_{i=s+1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{(n-s)^3 - (n-s)}{3}.$$

相加得,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)^2 + \frac{1}{n-s}\left(\sum_{i=s+1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{s^3 + (n-s)^3 - n}{3}.$$

又注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i =& (b_1 - a_1) + \cdots + (b_s - a_s) + (a_{s+1} - b_{s+1}) + \cdots + (a_n - b_n) \\ =& [(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n] - (1 + 2 + \cdots + n) = n^2,\end{aligned}$$

所以由柯西不等式,

$$\frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)^2 + \frac{1}{n-s}\left(\sum_{i=s+1}^{n} x_i\right)^2 \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{s} x_i + \sum_{i=s+1}^{n} x_i\right)^2}{s + (n-s)} = n^3.$$

最后由 $y = x^3$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是下凸的知,

$$s^3 + (n-s)^3 \ge \left[\frac{n}{2}\right]^3 + \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)^3.$$

这样,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge n^3 + \frac{\left[\frac{n}{2}\right]^3 + \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)^3 - n}{3} = C_n.$$

当取

$$A = \left\{1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{2}\right],\ n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ \cdots,\ 2n\right\},$$

$$B=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+n\right\}$$

时, 因为

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{2n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

所以由排序不等式知, 当 $a_1<a_2<\cdots<a_n,\ b_1>b_2>\cdots>b_n$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2$ 最大, 经计算等于 $C_n$.

综上, 所求最大值为 $C_n$. □

**评注** 由排序不等式, 注意到在 $A$ 中元素从小到大排列, $B$ 中元素从大到小排列时, $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2$ 取得最大值.这个做法的关键在于设出 $|a_i-b_i|$, 之后利用 "$x_1\geq x_2+2\geq\cdots\geq x_s+2(s-1)$" 等式子进行放缩. 在做这种类型的题目时, 在放缩的过程中要根据取等条件来放缩. 同时, $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=n^2$ 也是一个经典的结论.

**3.** 求函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对 $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}$, 均有

$$f(x+yf(x))+f(xy)=f(x)+f(2019y).$$

**解** 记原方程为 $P(x,\ y)$. 由 $P(2019,\ y)$ 知 $f(2019+yf(2019))=f(2019)$.

若 $f(2019)\neq 0$, 让 $y$ 取遍 $\mathbb{R}$, 知 $f$ 是常值函数, 检验知合题.

下考虑 $f(2019)=0$.

(1) 若 $\exists\, x_0\neq 2019$, 使 $f(x_0)=0$. 考虑 $P(x,\ 1)$, 知

$$f\left(x+f(x)\right)=0.$$

考虑 $P(x_0,\ y)$, 知

$$f(x_0y)=f(2019y).$$

记 $c=\dfrac{x_0}{2019}$, 则

$$P(y)=P(cy),\quad \forall y\text{ 成立}.$$

考虑 $P(x,\ y)$ 和 $P(cx,\ y)$ 知

$$f\left(cx+yf(x)\right)=f\left(x+yf(x)\right)$$

①若 $\forall\, x\neq 0,\ f(x)=0$. 经检验合题.

②若 $\exists\, x\neq 0,\ f(x)\neq 0$, 取 $f(x)\neq 0$. 让 $y$ 取遍 $\mathbb{R}$, 则 $z=x+yf(x)$ 也可取

遍 $\mathbb{R}$. 此时, 有

$$f((c-1)x+z)=f(z), \quad \forall z\in\mathbb{R} \text{ 成立}.$$

因此 $f(x)=f(x+T)$ 是周期函数.

考虑 $P(x+T,\ y)$ 和 $P(x,\ y)$, 作差知

$$f(xy)=f(xy+yT), \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \text{ 成立}.$$

因此 $f$ 是常值函数. 经检验合题.

(2) 若 $\forall\, x_0\neq 2019,\ f(x_0)\neq 0$.

由 $P(x,\ 1)$ 知 $f\left(x+f(x)\right)=0$. 因此 $f(x)=2019-x$. 经检验合题.

综上所述, 原方程的解为:

① $f(x)=c$.

② $f(x)=2019-x$.

③$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0.\\ c, & x=0(c\neq 0).\end{cases}$ □

**评注** 这是 2019 年罗马尼亚大师赛的第五题. 这是一个比较困难的问题, 虽然有一些不同的做法, 但思路都大致相同, 其中较重要的结论(包括 $f(2019)=0$ 和周期性的证明)也都需要. 同时, 这道题也很容易产生漏解.