2019 年罗马尼亚大师杯 (RMM) 组合部分预选题

韩新淼
(浙江乐清知临中学, 325600)
指导教师: 羊明亮

罗马尼亚大师杯 (RMM) 是由罗马尼亚数学会主办的一场国际邀请赛, 自 2008 年开始每年于 2 月举办, 是一个在国际上十分重要的比赛. 本文为 2019 年 RMM 组合部分的预选题, 共 3 道题. 笔者认为第二题相对简单, 第一题和第三题较难.

囿于笔者水平, 文中若有不当之处, 请读者批评指正.

I. 试 题

1. 已知正整数 k, N 满足: $k>1$, $N>2k+1$. 现有 N 个人围绕圆桌坐成一圈, 其中每个人要么是骑士(永远说真话)要么是骗子(永远说假话), 且每个人都可以看到他左侧(顺时针方向)的 k 个人和右侧(逆时针方向)的 k 个人. 如果每个人都说“我能看到的左侧的骑士人数和右侧的骑士人数一样多”. 那么, 是否每个人都一定是骑士?

2. 给定正整数 $n\geq 2$. 我们在一个 $3n\times 3n$ 的国际象棋棋盘的某个单元格中放置一枚棋子“王”, 已知“王”在每一步可以向上移动一格, 或向右移动一格, 或向其左下方移动一格. 若经过 k 步之后, 该棋子回到了初始位置, 并且移动过程中每个单元格至多经过一次. 试求 k 的最大值.

3. 给定奇数 $n>1$, 对 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一个排列 $p_1,\ \cdots,\ p_n$, 记 S 为满足: 当 $1\leq i\leq j\leq n$ 时, 有 $n\mid p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$ 的数对 $(i,\ j)$ 的数目. 求 S 的最大值.

修订日期: 2020-07-16.

II. 解答与评注

1. 已知正整数 k, N 满足: $k>1$, $N>2k+1$. 现有 N 个人围绕圆桌坐成一圈, 其中每个人要么是骑士(永远说真话)要么是骗子(永远说假话), 且每个人都可以看到他左侧(顺时针方向)的 k 个人和右侧(逆时针方向)的 k 个人. 如果每个人都说“我能看到的左侧的骑士人数和右侧的骑士人数一样多”. 那么, 是否每个人都一定是骑士?

解 当 $(N,\ 2k+1)=1$ 时, 每个人一定是骑士; 当 $(N,\ 2k+1)>1$ 时, 不一定每个人都是骑士.

一方面, 当 $(N,\ 2k+1)=d>1$ 时, 进行构造:

对于 $1\le i\le N$, 当 $i\equiv 1 \pmod d$ 时, 令第 i 人为骑士, 否则令第 i 人为骗子.

此时对于每一个骗子, 注意到连续 $2k+1$ 人中恰 $\frac{2k+1}{d}$ 个骑士, 那么骗子看到的骑士数为 $\frac{2k+1}{d}$ 奇数个, 左右两侧看到的骑士数奇偶性不同, 那么骗子撒谎, 满足要求. 而对于每一个骑士, 他左侧 k 人与右侧 k 人是对称的, 他说了真话, 满足要求.

另一方面, 我们证明 $(N,\ 2k+1)=1$ 时, 每个人必为骑士. 令

$$f(i)=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 人为骑士}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 人为骗子},\end{cases} \quad (1\le i\le N),\ \text{且}\ f(i+N)=f(i),\ (i\in\mathbb{Z}).$$

令

$$g(i)=\sum_{j=i-k}^{i} f(j)-\sum_{j=i}^{i+k} f(j),$$

由条件知, $f(i)=0$ 时, $g(i)\ne 0$; $f(i)=1$ 时, $g(i)=0$. 由 $g(i)$ 表达式知,

$$g(i+1)-g(i)=f(i+1)+f(i)-f(i-k)-f(i+k+1), \qquad (*)$$

首先, $f(i)$ 不全为 0. 不然, 结合 $g(i)$ 表达式知, $g(i)$ 全为 0, 与 $f(i)=0$ 时, $g(i)\ne 0$ 矛盾!

下对 $g(i+1)-g(i)$ 的值分类讨论.

① 当 $f(i)=f(i+1)=0$ 时, 结合 $(*)$, 有

$$g(i+1)-g(i)=-f(i-k)-f(i+k+1)\le 0.$$

② 当 $f(i)=0,\ f(i+1)=1$ 时, 有 $g(i+1)=0,\ g(i)\ne 0$. 结合 $(*)$, 有

$$-g(i)=g(i+1)-g(i)=1-f(i-k)-f(i+k+1).$$

而 $f(i-k)\in\{0,\ 1\}$, $f(i+k+1)\in\{0,\ 1\}$, 所以

$$1-f(i-k)-f(i+k+1)\in\{-1,\ 0,\ 1\},$$

结合 $g(i)\neq 0$ 知, $g(i)\in\{-1,\ 1\}$, $g(i+1)-g(i)\in\{-1,\ 1\}$.

③ 当 $f(i)=1,\ f(i+1)=0$ 时, 与②同理, 知 $g(i+1)-g(i)\in\{-1,\ 1\}$.

I) 下面考虑使得 $f(i)=0$ 的 i. 结合 $f(i)$ 不全为 0 知, 存在最小的 $s,\ t\in\mathbb{N}^*$, 使得

$$f(i-s)=f(i+t)=1.$$

结合②③与 $g(i-s)=g(i+t)=0$ 知,

$$g(i-s+1),\ g(i+t-1)\in\{-1,\ 1\},$$

再结合①知,

$$1\geq g(i-s+1)\geq g(i-s+2)\geq\cdots\geq g(i+t-1)\geq -1$$

而由 $f(i)=0$ 知 $g(i)\neq 0$, 结合 $|g(i)|\leq 1$ 知 $2\nmid g(i)$, 那么

$$f(i)-g(i)\equiv 1\pmod 2.$$

II) 再考虑使得 $f(i)=1$ 的 i, 此时 $g(i)=0$,

$$f(i)-g(i)\equiv 1\pmod 2.$$

那么对于 $\forall i\in\mathbb{Z}$, $f(i)-g(i)\equiv 1\pmod 2$, 代入 $(*)$ 得

$$f(i-k)\equiv f(i+k+1)\pmod 2,$$

那么 $f(i-k)=f(i+k+1)$. 于是 $2k+1$ 为 $f(i)$ 的周期, 结合 N 为周期知, $(2k+1,\ N)=1$ 也为 $f(i)$ 的周期. 而 $f(i)$ 不全为 0, 所以 $f(i)$ 全为 1.

综上, $(N,\ 2k+1)=1$ 时, 每个人都为骑士, $(N,\ 2k+1)>1$ 时, 不一定每人为骑士. □

评注 本题易想到从一个具有特殊意义的“值”考虑, 经过一定的推理, 可找到关于该“值”的变化规律, 从而找到思路.

2. 给定正整数 $n\geq 2$. 我们在一个 $3n\times 3n$ 的国际象棋棋盘的某个单元格中放置一枚棋子“王”, 已知“王”在每一步可以向上移动一格, 或向右移动一格, 或向其左下方移动一格. 若经过 k 步之后, 该棋子回到了初始位置, 并且移动过程中每个单元格至多经过一次. 试求 k 的最大值.

解 k 的最大值为 $9n^2-3$.

(i) 一方面, 给出构造: 对 $3n$ 行 $3n$ 列的方格表自上向下, 自左向右分别为行、列编号 1, 2, $\cdots$, $3n$. 对第 i 行, 第 j 列的格子, 记为 $(i,\ j)1\le i,\ j\le 3n$. 对王在的格子 $(i,\ j)$:

① $i=3s(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 及 $j=1$ 或 $j=t(t=3,\ 4,\ \cdots,\ 3n+1)$ 或 $(i,\ j)=(3n,\ 2)$ 时, 则王向右走.

② $s=3n-1(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 及 $j=t(t=3,\ 4,\ \cdots,\ 3n)$ 时或 $i=3s(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 及 $j=3n$ 时, 王向上走.

③对除了 (1, 1), (1, 2), (2, 1) 及①, ②中格子外的格子时, 王向左下走.

连出王行走轨迹(王从 $(3n,\ 1)$ 出发), 如图 1, 是满足要求的, 且 $k=9n^2-3$.

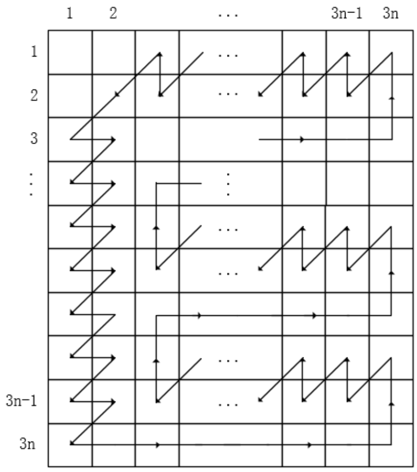

图 1

(ii) 另一方面, 假设 $k>9n^2-3$, 注意到王行走了一个圈, 那么王若向左下方走了 t 步, 则必要向上及向右走 t 步. 于是王走的步数为 3 的倍数, 故 $3\mid k$. 又 $k\le 9n^2$, 知 $k=9n^2$. 即王要经过全部的格.

那么, 我们考虑左上方和右下方 (1, 1), (1, 2), (2, 1); $(3n-1,\ 3n)$, $(3n,\ 3n-1)$, $(3n,\ 3n)$. 注意到要过 (1, 1), $(3n,\ 3n)$ 结合王只能向上、向右、向左下走, 于是必有 $(2,\ 1)\to(1,\ 1)\to(1,\ 2)$, $(3n,\ 3n-1)\to(3n,\ 3n)\to(3n-1,\ 3n)$.

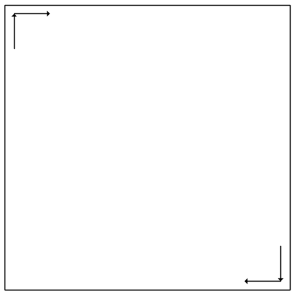

图 2

如图 2 ,整个路径封闭, 知王一定是从 (1, 2) 走到 $(3n,\ 3n-1)$ 且从 $(3n-1,\ 3n)$ 走到 (2, 1). 分别称其为路径 M, 路径 N, 则 M 将表分为了两部分, (2, 1), $(3n-1,\ 3n)$ 各在一部分. 于是路径 N 一定与路径 M 相交. 而无论路径 M 在交点处是 $\rightarrow$ 或 $\uparrow$ 或 $\swarrow$, 王总是在行或列的编号上改变了至少 1. 这样除非“ $\times$ ”如交叉, 否则必有交格, 但王只能向左下移动, 故不成立. 因此 $k \leq 9n^2-3$.

综上, k 的最大值为 $9n^2-3$. $\square$

评注 本题关键在于两个方面, 一个则是先猜对答案, 发现仅 3 个格不到是极为关键的. 这点从较小的 n 摸索是可以发现的. 另一个就是抓住特殊元素, 即左上角, 右下角, 分析就可以完善证明.

3. 给定奇数 $n>1$, 对 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 $p_1, \cdots, p_n$, 记 S 为满足: 当 $1 \leq i \leq j \leq n$ 时, 有 $n \mid p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$ 的数对 $(i,\ j)$ 的数目. 求 S 的最大值.

解 1 $S_{\max}=\frac{(n+1)(n+3)}{8}$.

(1) 一方面, 取 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)=(n, 1, n-1, 2, n-2, \cdots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$. 考虑 $n \mid p_i+\cdots+p_j$ 的 (i,j) 对. 将 $n, (1, n-1), (2, n-2), \cdots, (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ 看作 $\frac{n+1}{2}$ 个整体. 任意取一个连续和均为一个满足要求的排列, 所以

$$S \geq \mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}}^{2}+\frac{n+1}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

(2) 另一方面, 下面证明 $S \leq \frac{(n+1)(n+3)}{8}$.

为方便, 记

$$\sigma_{ij}=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j,\ 1 \leq i \leq j \leq n.$$

我们将其分为 3 类.

$$A=\left\{(i,\ j) \middle| n \mid \sigma_{ij} \text{ 且 } p_i=n \text{ 或 } p_j=n\right\},$$
$$B=\left\{(i,\ j) \middle| n \mid \sigma_{ij} \text{ 且 } n \mid p_i+p_j \text{ 且 } p_i,\ p_j \neq n\right\},$$
$$C=\left\{(i,\ j) \middle| n \mid \sigma_{ij} \text{ 且 } n \nmid p_i+p_j \text{ 且 } p_i,\ p_j \neq n\right\}.$$

则 $S=|A|+|B|+|C|$.

设 $p_t=n$, 则 $(t,t) \in A$, $(t-1,t), (t,t+1)$ 均不在 A, B, C 中. 先考虑 (i,t), $i<t-1$, 将数两两配对 (可能剩一个) 如下:

$$((t-2,\ t),\ (t-3,\ t)),\ ((t-4,\ t),\ (t-5,\ t)),\ \cdots$$

每一对里最多一个在 A 中, 否则 $n \mid \sigma_{i,t}$, $n \mid \sigma_{i-1,t}$, $(i=t-2,\ t-4,\ \cdots)$ 两式

相减 $n \mid p_i$ 与 $i \neq t$ 矛盾!因此 $(i,\ t)$, $i < t-1$ 中最多仅有 $\left[\frac{t-2+1}{2}\right]$ 个. 类似的 $(i,\ t)$, $i > t+1$ 中最多仅有 $\left[\frac{n-t-1+1}{2}\right]$ 个. 所以

$$|A| \le \left[\frac{t-2+1}{2}\right] + \left[\frac{n-t-1+1}{2}\right] + 1 \le \frac{n+1}{2}(\text{ 有 } (t,\ t) \in A\ )$$

对 B 中任意元素 $(i,\ j)$ 有 $n \mid p_i + p_j$. 最多 $\frac{n-1}{2}$ 对, 则 $|B| \le \frac{n-1}{2}$.

再考虑 C 中的元素, 注意到 $i,\ j \neq t$, 且 $n \mid n$. 故 p_t 在哪对 σ_{ij} 的 $\bmod n$ 的值无影响. 不妨设 $t = n$. 记 $K_i = \{2i-1,\ 2i\}$, $1 \le i \le \frac{n-1}{2}$. 注意到 C 中的元素 $(i,\ j)$ 满足 $n \nmid p_i + p_j$. 因此 $(i,\ j)$ 不在同一个 $K_u (1 \le u \le \frac{n-1}{2})$ 中.

设 $i \in K_{u_1}$, $j \in K_{u_2}$, $u_1 < u_2$. 考虑 $\sigma_{2u_1-1,2u_2-1}$, $\sigma_{2u_1-1,2u_2}$, $\sigma_{2u_1,2u_2-1}$, $\sigma_{2u_1,2u_2}$. 下证这四个元素最多有一个在 C 中.

否则, 至少两个在 C 中, 由于 p_{2u_1-1}, p_{2u_1}, p_{2u_2-1}, $p_{2u_2} \not\equiv 0 \pmod n$.

若 $(2u_1-1,\ 2u_2-1) \in C$, 则 $(2u_1,\ 2u_2-1) \notin C$, $(2u_1-1,\ 2u_2) \notin C$. 从而 $(2u_1,\ 2u_2) \in C$. 于是 $p_{2u_1-1} \equiv p_{2u_2} \pmod n$, 矛盾!

故 $(2u_1-1,\ 2u_2-1) \notin C$, 同理 $(2u_1,\ 2u_2) \notin C$ 则 $(2u_1-1,\ 2u_2) \in C$, $(2u_1,\ 2u_2-1) \in C$. 但由定义可知 $(2u_1-1,\ 2u_2) \in B$, 矛盾!故 $(2u_1-1,\ 2u_2-1)$, $(2u_1-1,\ 2u_2)$, $(2u_1,\ 2u_2-1)$, $(2u_1,\ 2u_2)$ 最多一个在 C 中, 可将 K_i 看作整体 $1 \le i \le \frac{n-1}{2}$. 因此 $|C| \le C^2_{\frac{n-2}{2}}$. 故

$$S \le |A| + |B| + |C| \le \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} + C^2_{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

综上, 有

$$S_{\max} = \frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$

□

评注 答案是容易的, 重点在于估计, 此种解法完全按照构造的想法估计, 配对放缩. 虽略显繁琐但极其自然, 是算两次与一一对应的"典范".

解 2 $S_{\max} = \mathrm{C}^2_{\frac{n+3}{2}}$.

记 $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*$.

一方面, 构造 p 使 $S \ge \mathrm{C}^2_{k+2}$.

取 $p_{2i-1} = i$, $p_{2i} = 2k+1-i$, $i = 1, \cdots, k$, $p_{2k+1} = 2k+1$, 则 $\forall i,\ j \in \{0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2k,\ 2k+1\}$, $i < j$, 均有 $p_{i+1} + p_{i+2} + \cdots + p_j$ 为 $2k+1$ 的倍数(因为 $2k+1 \mid p_{2u-1} + p_{2u}$, $u = 1, \cdots, k$, $2k+1 \mid p_{2k+1}$). 故 $S \ge \mathrm{C}^2_{k+2}$.

另一方面, 证明 $S \le \mathrm{C}^2_{k+2}$.

记 $\sigma_j = p_1 + p_2 + \cdots + p_j$, $j = 0, 1, \cdots, 2k+1$, 则 $\forall t \in \mathbb{Z}$, 满足 $1 \le j \le 2k+1$

且 $\sigma_j-\sigma_{j-1}\equiv t \pmod{2k+1}$ 的 j 恰有一个.于是, $\forall r\in\mathbb{Z}$, 满足 $0\le j\le 2k+1$ 且 $\sigma_j\equiv r \pmod{2k+1}$ 的 j 至多 $k+2$ 个(因为这样的 j 中相邻对至多一对). 及 $\forall u,\ v\in\mathbb{Z}$, 满足 $0\le j\le 2k+1$ 且 $\sigma_j\equiv u$ 或 $v \pmod{2k+1}$ 的 j 至多 $k+3$ 个(因为这样的 j 中相邻对至多三对).

考虑

$$\sigma_u\equiv\sigma_v \pmod{2k+1} \tag{$*$}$$

的有序组 $(u,\ v)$ 个数. 任取 $i\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ k\}$.

若 $\sigma_{2i}\not\equiv\sigma_{2i+1} \pmod{2k+1}$, 则满足 $\sigma_j\equiv\sigma_{2i}$ 或 $\sigma_{2i+1} \pmod{2k+1}$, $0\le j\le 2k+1$ 的 j 至多 $k+3$ 个, 则 $(*)$ 的满足 $v=2i$ 或 $2i+1$ 的解数至多 $k+3$ 个.

若 $\sigma_{2i}\equiv\sigma_{2i+1} \pmod{2k+1}$, 则满足 $\sigma_j\equiv\sigma_{2i} \pmod{2k+1}$, $0\le j\le 2k+1$ 的 j 至多 $k+2$ 个, 则 $(*)$ 的满足 $v=2i$ 或 $2i+1$ 的解数至多 $2(k+2)$ 个, 且此类 i 至多一个.

因此, $(*)$ 解数至多 $k(k+3)+2(k+2)=k^2+5k+4$.

于是, $\sigma_u\equiv\sigma_v$ 且 $u<v$ 的解 $(u,\ v)$ 至多

$$\frac{1}{2}((k^2+5k+4)-(2k+2))=\frac{1}{2}(k^2+3k+2).$$

即

$$s\le \mathrm{C}_{k+2}^2.$$

综上, $S_{\max}=\mathrm{C}_{\frac{n+3}{2}}^2$. □

评注 本题将连续若干项的和化为部分和能看起来清晰一点, 也是常见手法. 单纯用单个项去计数会不太够, 结合取等, 便退一步考虑两项一起计.