“大师杯”中一个似乎太过简单的构造问题

冯跃峰

【问题】 多边形的三角剖分, 是用在多边形内部且在内部互不相交的一些对角线将多边形分割为若干三角形. 试证: 对任意正整数 n, 均存在一个 (未必是凸的) 多边形, 其任意 3 个顶点不共线, 且恰有 n 种方式作三角剖分.

(2019 年罗马尼亚大师杯)

【新写】 从圆 O 外一点 G 作圆的两条切线, 切点为 M, N. 在 GM, GN 的反向延长线上分别取点 P, Q, 在 M, N 间的劣弧上依次取 n 点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 则多边形 $PQA_1A_2\cdots A_n$ 恰有 n 种三角剖分.

实际上, 考察直线 $PA_i(1 \le i \le n)$, 假设它与劣弧交于另一点 B_i, 则 MNA_iB_i 是凸四边形, MN 在直线 A_iB_i 的同侧. 但直线 A_iB_i 与 $\triangle GMN$ 边界有两个交点, 设直线 A_iB_i 与线段 GM 相交于 T, 则 PM, A_iB_i 有两个交点 P, T, 矛盾. 所以直线 PA_i 与劣弧只有唯一交点, 从而 PA_i 在多边形内, 同理 QA_i 在多边形内.

因为对角线 $A_sA_t(1 \le s < t \le n)$ 在多边形外, 所以三角剖分中的对角线必须以 P 或 Q 为其一个端点. 设劣弧上与 Q 连边的点有 $i(1 \le i \le n)$ 个, 其边只能是 $QA_1, QA_2, \cdots, QA_i$. 进而, P 连的 $n+1-i$ 条边为 $PA_i, PA_{i+1}, \cdots, PA_n$. 注意到 $i = 1, 2, \cdots, n$, 所以共有 n 种剖分, 命题获证. □

【注】 组合几何的有关证明中, 最容易犯的错误是, 用几何直观代替严密的逻辑论证而默认有关事实.

比如本题, 最有可能出现的疏漏就是, 默认对角线 $PA_i, QA_i(1 \le i \le n)$ 在多边形内而不加以证明. 实际上, 构图的核心是如何选取 P, Q, 使对角线 $PA_i, QA_i(1 \le i \le n)$ 在多边形内, 以及严密论证它们确实在多边形内, 这才是本题的价值所在, 而其宏观构图则是很易发现的.

井蛙之见, 谬误难免, 欢迎指正!

修订日期: 2020-07-16.